

АЛГЕБРА

8

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

КЛАСС

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

π

$$\frac{1}{x^2 + 1} \geq 0$$



Д.А. Куделина, Е.А. Куделина

АЛГЕБРА
8 класс
УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ
ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

2-е издание, электронное



Москва
Издательство «Интеллект-Центр»
2026

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

К88

Рецензенты:

Е. В. Лукьянова – кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математического анализа им. П.С. Новикова ИМИИ МПГУ,
учитель высшей категории;

Т. Н. Казарихина – кандидат педагогических наук, учитель математики
и информатики высшей квалификационной категории,
заместитель директора АНО СОШ «Димитриевская», доцент МПГУ

Куделина, Д. А.

К88 Алгебра. 8 класс. Углублённый уровень. Тетрадь-тренажёр : учебное пособие /
Д. А. Куделина, Е. А. Куделина. — 2-е изд., эл. — 1 файл pdf : 107 с. — Москва :
Издательство «Интеллект-Центр», 2026. — Систем. требования: Adobe Reader XI ли-
бо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-908080-21-7

Тетрадь-тренажёр — это уникальное пособие, способствующее систематическому углублению изучаемого материала и развитию навыков решения сложных задач, а также подготовке к вступительным экзаменам в 9 класс с углублённым изучением математики. Все задания удобно систематизированы в виде таблиц, а выполнять их решение можно непосредственно в тетради-тренажёре. Материалы ориентированы на учебник «Математика. Алгебра. 8 класс. Углублённый уровень» под редакцией С. А. Теляковского; также возможно их применение с другими учебниками по алгебре для 8-го класса.

Пособие адресовано учителям математики, репетиторам, учащимся и их родителям.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

Электронное издание на основе печатного издания: Алгебра. 8 класс. Углублённый уровень. Тетрадь-тренажёр : учебное пособие / Д. А. Куделина, Е. А. Куделина. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2026. — 107 с. — ISBN 978-5-907985-46-9. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-908080-21-7

© ООО «Издательство «Интеллект-Центр», 2026

© Куделина Д. А., Куделина Е. А., 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта тетрадь-тренажёр продолжает серию пособий, предназначенных помочь учащимся освоить школьную программу по алгебре на высоком уровне.

Изучение алгебры в 7–9 классах крайне важно: знания, полученные на уроках, являются инструментом для изучения других предметных областей, решение задач способствует развитию интеллекта, воспитывает в ребёнке точность, конкретность, последовательность, оперативность. Интерпретируя полученные результаты, он учится объективно оценивать ситуацию, анализировать варианты решения и выбирать из них рациональные.

Многолетняя практика работы в школе показывает, что большое количество учащихся, не обладающих выдающимися математическими способностями, считают алгебру трудным предметом, но учить её должен каждый, и потому очень важно, чтобы это обучение было максимально полезным и, по возможности, приятным.

А можно ли сделать процесс обучения математике эффективным? Могут ли родители помочь своему ребёнку, особенно если алгебра представляет для него определённые трудности? Работая много лет в общеобразовательных и профильных классах, опираясь на свой двадцатилетний опыт обучения детей с разными математическими способностями, решительно отвечаем «да»!

Содержание курса «Алгебра» (7–9 классы) не столько сложно, сколько специфично: все темы, изучаемые на протяжении обучения в школе, как ни в каком другом предмете очень плотно взаимосвязаны друг с другом, а это значит, что, в случае «потери» одной из них (пропустил урок, некачественно или несвоевременно выполнил домашнее задание и пр.), нарушаются многие логические связи, и возникают трудности для дальнейшего освоения, и, увы, учащемуся становится неинтересно.

Одна из основных целей предлагаемой вашему вниманию тетради-тренажёра – помочь учащимся средней школы освоить разделы программы по математике на более глубоком уровне. В тетради-тренажёре собраны задания из личной практики авторов, для выполнения которых требуется более высокая степень владения материалом, понимания и осмысленности действий, эти задания предполагают знакомство учащихся с методами и идеями, необходимыми для дальнейшего успешного углублённого изучения математики.

Собранные в тетради-тренажёре задания систематизированы в таблицы, перед каждой из которых сформулировано задание, которое предлагается выполнить учащемуся. Каждое из заданий пособия, на наш взгляд, целесообразно проработать отдельно, записывая пусть и не подробное решение в пособие. К заданиям приведены необходимые теоретические сведения, которые отмечены специальным



знаком , и в конце пособия даны ответы.

Тетради-тренажёры помогут:

- ученикам получить прочные математические знания;
- родителями помочь своим детям стать успешными в данном предмете;
- учителям повысить свой методический уровень;
- репетиторам максимально эффективно устранить пробелы в знаниях учащихся.

ДРОБИ



Важно знать:

- $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – рациональная дробь, где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.
- Допустимые значения переменной x для дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ находятся из условия $Q(x) \neq 0$.
- $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0; \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$
- $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x) \cdot G(x)}{Q(x) \cdot G(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$, $G(x)$ – многочлены, причём $Q(x) \neq 0$, $G(x) \neq 0$.

Задание 1

Найдите допустимые значения переменной для дроби.

1) $\frac{3a}{ a -1}$	Ответ: _____
2) $\frac{5m}{ m -9}$	Ответ: _____
3) $\frac{5}{5x - \frac{5}{x}}$	Ответ: _____
4) $\frac{7x}{7x - \frac{7}{x}}$	Ответ: _____
5) $\frac{y}{y^2 - 3 y }$	Ответ: _____
6) $\frac{n}{7 n - n^2}$	Ответ: _____
7) $\frac{2y-1}{(2y+1)^3 - 8y - 4}$	Ответ: _____

8) $\frac{2y-1}{(3y-1)^3-6y+2}$	Ответ: _____
9) $\frac{6b}{7b^2+4b}$	Ответ: _____
10) $\frac{-3b}{9b^2-7b}$	Ответ: _____
11) $\frac{m}{m^2+2m-3}$	Ответ: _____
12) $\frac{k}{k^2-4k+3}$	Ответ: _____
13) $\frac{t^{16}-1}{t^8-1}$	Ответ: _____
14) $\frac{s^{16}+16}{s^8-1}$	Ответ: _____
15) $\frac{3a+7b}{a^2-b^2-16+8b}$	Ответ: _____
16) $\frac{11a+2b}{a^2-b^2-25-10b}$	Ответ: _____
17) $\frac{81k^2}{k(4k-8)(k^2+16)}$	Ответ: _____
18) $\frac{36t^2}{t(14t+7)(t^2+49)}$	Ответ: _____
19) $\frac{15s^2+25}{(s^2+16)(s^2-9)}$	Ответ: _____
20) $\frac{6s^2+36}{(s^2+9)(s^2-16)}$	Ответ: _____

Задание 2

При каких значениях переменной значение дроби равно 0?

1) $\frac{y^2 + 2y}{7y^2}$	Ответ: _____
2) $\frac{y^2 - 5y}{7y^2}$	Ответ: _____
3) $\frac{y^2 - 49}{y^2 + 49}$	Ответ: _____
4) $\frac{y^2 - 81}{y^2 + 81}$	Ответ: _____
5) $\frac{x^2 - 4}{x(x+1)(x-2)}$	Ответ: _____
6) $\frac{x^2 - 49}{x(x+7)(x-2)}$	Ответ: _____
7) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 3x}$	Ответ: _____
8) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x}$	Ответ: _____
9) $\frac{y^3 - y^2 + y - 1}{y^3 - 2y^2 + y - 2}$	Ответ: _____
10) $\frac{y^3 - y^2 + y - 1}{y^3 + 3y^2 + y + 3}$	Ответ: _____
11) $\frac{x(x+4)}{x - \frac{16}{x}}$	Ответ: _____
12) $\frac{x(x+5)}{x - \frac{25}{x}}$	Ответ: _____

Задание 3

При каких натуральных значениях переменной дробь принимает целые значения?

1) $\frac{7}{2a+1}$	Ответ: _____
2) $\frac{5}{2a-1}$	Ответ: _____
3) $\frac{3x+9}{3x}$	Ответ: _____
4) $\frac{7x+14}{7x}$	Ответ: _____
5) $\frac{4}{3y-2}$	Ответ: _____
6) $\frac{5}{3y-1}$	Ответ: _____
7) $\frac{2x-3}{x+1}$	Ответ: _____
8) $\frac{2x+5}{x-1}$	Ответ: _____

Задание 4

Сократите дробь.

1) $\frac{(x+1)^2+1}{x^4+4}$	Ответ: _____
2) $\frac{(x-1)^2+1}{x^4+4}$	Ответ: _____

$$3) \frac{x^3 + 4x^2y + 4xy^2}{x^3 - 4xy^2}$$

Ответ: _____

$$4) \frac{x^3 - 6x^2y + 9xy^2}{x^3 - 9xy^2}$$

Ответ: _____

$$5) \frac{y^8 + y^4 - 6}{9 - y^8}$$

Ответ: _____

$$6) \frac{y^8 + y^4 - 12}{9 - y^8}$$

Ответ: _____

$$7) \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 1}$$

Ответ: _____

$$8) \frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 + 1}$$

Ответ: _____

$$9) \frac{9y^2 - 3y + 1}{81y^4 + 9y^2 + 1}$$

Ответ: _____

$$10) \frac{4y^2 - 2y + 1}{16y^4 + 4y^2 + 1}$$

Ответ: _____

$$11) \frac{x^2 - 4}{x^4 - 8x^2 + 16}$$

Ответ: _____

$$12) \frac{x^2 - 9}{x^4 - 18x^2 + 81}$$

Ответ: _____

$$13) \frac{27x^3 + 1}{1 - 9x^2}$$

Ответ: _____

$$14) \frac{64x^3 - 1}{1 - 16x^2}$$

Ответ: _____

$$15) \frac{a^2 - b^2 - 4a - 4b}{a - b - 4}$$

Ответ: _____

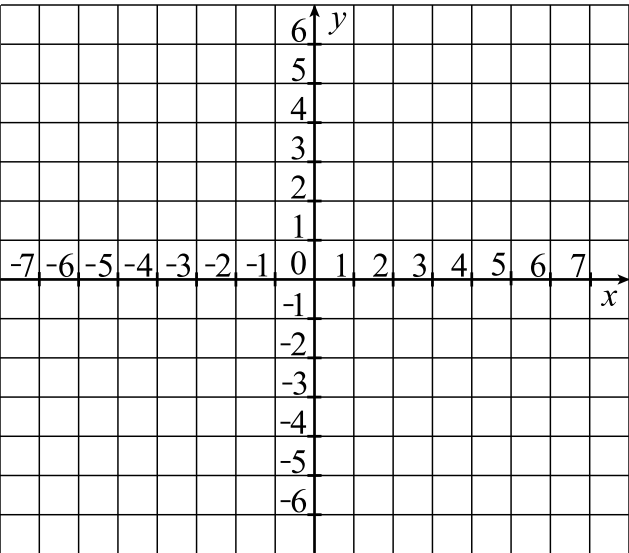
$$16) \frac{a^2 - b^2 + 3a - 3b}{a + b + 3}$$

Ответ: _____

Задание 5

Постройте график функции.

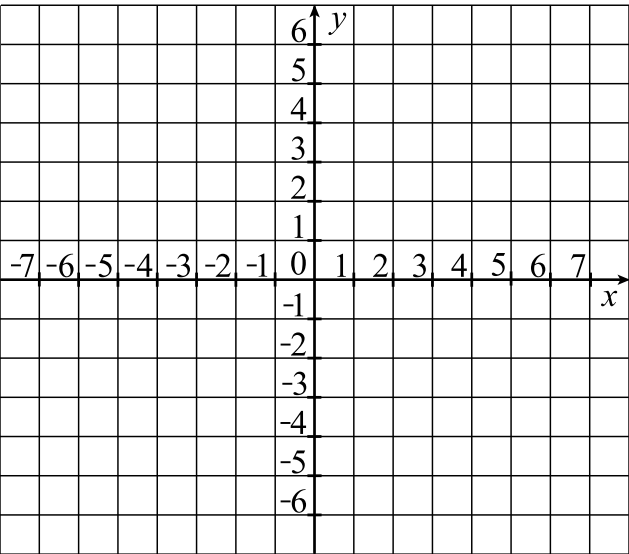
$$y = \frac{x^2 - 25}{2x + 10}$$



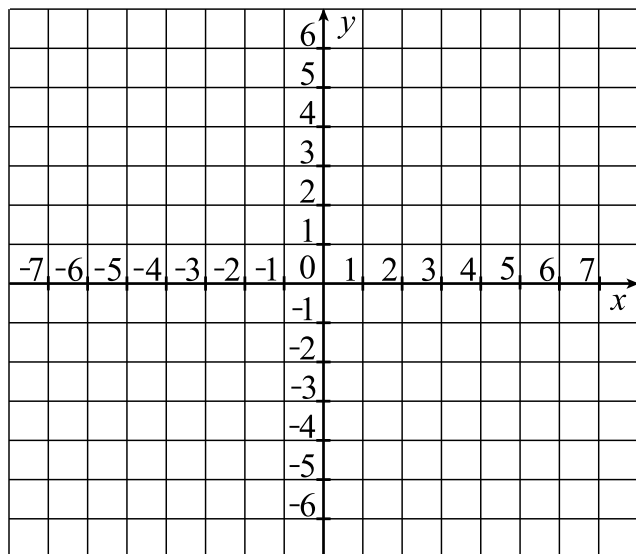
Задание 6

Постройте график уравнения.

1) $\frac{9x^2 - y^2 - 2y - 1}{3x + y + 1} = 0$



$$2) \frac{4x^2 - y^2 - 2y - 1}{2x + y - 1} = 0$$



Важно знать:

Алгоритм сложения (вычитания) дробей с различными знаменателями:

- разложить знаменатели дробей на множители (и, если возможно, сократить дроби);
- выбрать наименьший общий знаменатель дробей-слагаемых;
- записать у каждой дроби-слагаемого дополнительный множитель, которого «недостаёт» знаменателю этой дроби до наименьшего общего знаменателя;
- записать в числитель дроби-суммы сумму произведений числителей дробей и их дополнительных множителей;
- упростить числитель дроби-суммы и, если возможно, сократить полученную дробь.

Задание 7

Упростите выражение.

$$1) \frac{a^2 - 4a}{ab - 4a - 3b + 12} - \frac{a - 2}{b - 4}$$

Ответ: _____

$$2) \frac{x^2 - (y-z)^2}{(x-y+z)^2} + \frac{(x+y+z)^2}{(x+z)^2 - y^2}$$

Ответ: _____

$$3) 4a^2 - \frac{8a^3 + 27b^3}{2a - 3b} - 9b^2$$

Ответ: _____

$$4) \frac{x^2 - xy}{x^2y + y^3} - \frac{2x^2}{x^3 - xy^2 + x^2y - y^3}$$

Ответ: _____

$$5) \frac{3x+2}{3x^2-6x+4} - \frac{18x}{27x^3+8} - \frac{1}{3x+2}$$

Ответ: _____

$$6) \frac{1}{2x^2+5x} - \frac{2}{25-10x} - \frac{4}{4x^2-25}$$

Ответ: _____

Задание 8

При каких a и b выполняется данное тождество?

$$1) \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x+1} = \frac{6}{(x-5)(x+1)}$$

Ответ: _____

$$2) \frac{a}{y-3} + \frac{b}{y+3} = \frac{5y-3}{y^2-9}$$

Ответ: _____

$$3) \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+4} = \frac{9x}{(x-2)(x+4)}$$

Ответ: _____

$$4) \text{ Упростите выражение: } \frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)} + \frac{1}{(a-4)(a-5)}$$

Ответ: _____



Важно знать:

- $\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{G(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot G(x)}{Q(x) \cdot S(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$, $G(x)$, $S(x)$ – многочлены, причём $Q(x) \neq 0$, $S(x) \neq 0$.
- $\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{G(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot G(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$, $G(x)$, $S(x)$ – многочлены, причём $Q(x) \neq 0$, $G(x) \neq 0$, $S(x) \neq 0$.

Задание 9

Упростите выражения.

1) $\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 \cdot \frac{(a - b)^2 + 2ab}{(a - b)^2}$

Ответ: _____

2) $\frac{x^3 + 27}{x^2 - 4} \cdot \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3}$

Ответ: _____

3) $\frac{3x - 6y}{xy} : (x^2 - 4xy + 4y^2)$

Ответ: _____

$$4) \left(\frac{x^2 - 16}{x^2 + 8x + 16} \right)^3 \cdot \left(\frac{0,5x + 2}{0,5x - 2} \right)^3$$

Ответ: _____

$$5) \frac{x^4 - 16}{y^6 - 8} : \frac{2x^2 + 8}{(y^2 + 2)^2 - 2y^2}$$

Ответ: _____

$$6) \left(\frac{20y}{25 - y^2} + \frac{5 - y}{5 + y} \right) : \frac{5 + y}{5} - \frac{5}{5 - y}$$

Ответ: _____

$$7) \left(\frac{a^2 - ax}{x^2 - 2ax + a^2} - \frac{a^2x - ax^2 - a^3}{x^3 + a^3} \right) \cdot \frac{x^2 - a^2}{2}$$

Ответ: _____

$$8) \left(\frac{2x+3}{x^2-6x+9} : \frac{4x^2-9}{9-x^2} + \frac{1}{2x-3} \right) : (2x-6)$$

Ответ: _____

$$9) \left(\frac{1}{(a-2)^2} - \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{(a+2)^2} \right) \cdot (a^2-4)^2$$

Ответ: _____

$$10) \left(\frac{a-0,2b}{5a^2+ab+0,2b^2} + \frac{0,6ab}{5a^3-0,04b^3} + \frac{0,2}{a-0,2b} \right) \cdot \frac{5a-b}{2}$$

Ответ: _____

$$11) \left(\frac{3,6xy-2,1y^2}{1,44x^2-0,49y^2} + \frac{2x}{2,4x+1,4y} \right) \cdot \frac{12x^2+7xy}{x+3y}$$

Ответ: _____

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ



Важно знать:

$$\checkmark \quad \sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0; \\ b^2 = a; \end{cases}$$

✓ $\sqrt{a}$ имеет смысл при $a \geq 0$.

Свойства:

1) $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0;$

2) $\sqrt{a^2} = |a|;$

3) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}; a \geq 0; b \geq 0;$

4) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; a \geq 0; b > 0.$

Задание 10

Найдите значение выражения.

1) $0,2\sqrt{3600} - 0,15\sqrt{400} + (12\sqrt{0,05})^2$

Ответ: _____

2) $\frac{95}{\sqrt{361}} - \frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$

Ответ: _____

3) $\left(\sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{1\frac{25}{144}} + \sqrt{12,25}\right) \cdot (0,3\sqrt{2})^2$

Ответ: _____

Задание 11

Найдите допустимые значения переменной для выражения.

1) $\frac{1}{\sqrt{x}+7}$

Ответ: _____

2) $\frac{1}{5-\sqrt{x}}$

Ответ: _____

3) $\sqrt{-a^2}$

Ответ: _____

4) $\frac{\sqrt{7+\sqrt{x}}}{\sqrt{|x|}}$

Ответ: _____

5) $\sqrt{4a^2+4a+40}$

Ответ: _____

6) $\sqrt{-16a^2}$

Ответ: _____

7) $\sqrt{|3x+1|-2x}-\frac{22}{\sqrt{x-2}}$

Ответ: _____

Задание 12

Решите уравнение.

1) $\sqrt{2x+7} = 6$

Ответ: _____

2) $(2x+5)^2 = 14$

Ответ: _____

3) $\frac{3}{\sqrt{x-6}} = 12$

Ответ: _____

4) $(x-2)\sqrt{x-3} = 0$

Ответ: _____

5) $(x-1)\sqrt{x+1} = 0$

Ответ: _____

6) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$

Ответ: _____

7) $\sqrt{3+\sqrt{x}} = 2$

Ответ: _____

8) $\sqrt{2+\sqrt{4-\sqrt{x}}} = 2$

Ответ: _____

9) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$

Ответ: _____

10) $\sqrt{x-4} = \sqrt{3} - \sqrt{6}$

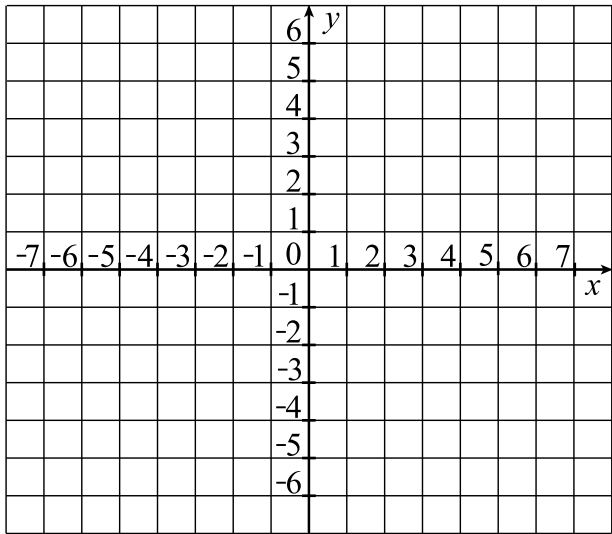
Ответ: _____

11) $(\sqrt{6x}-2)^2 = \sqrt{3}(\sqrt{2x}-\sqrt{12})+6x$

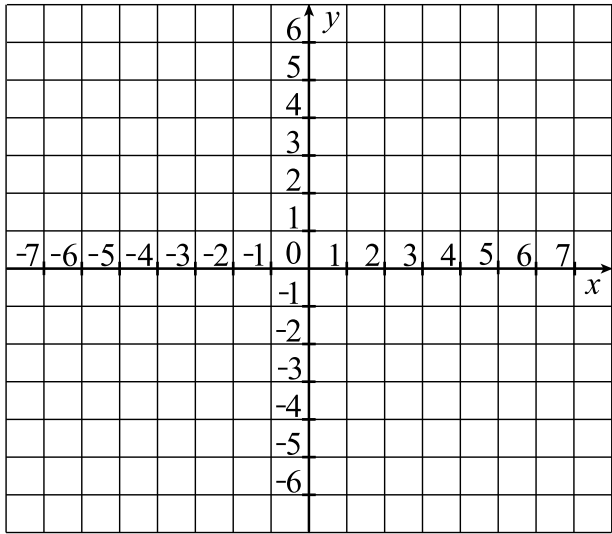
Ответ: _____

Задание 13
Постройте график функции.

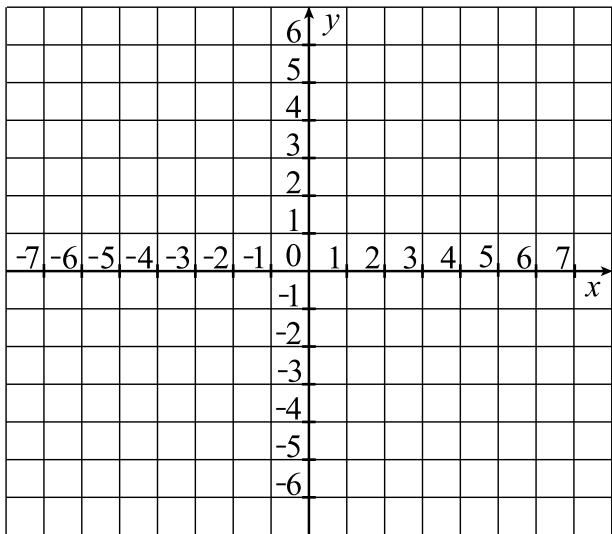
1) $y = \sqrt{-x^4}$



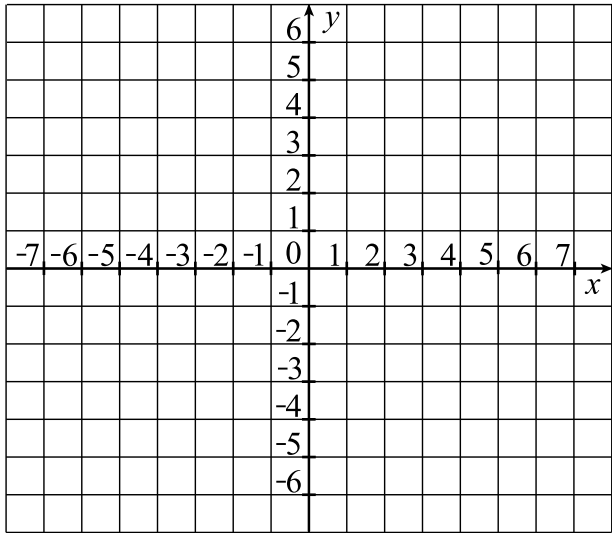
2) $y = \sqrt{6x - x^2 - 9} + 4$



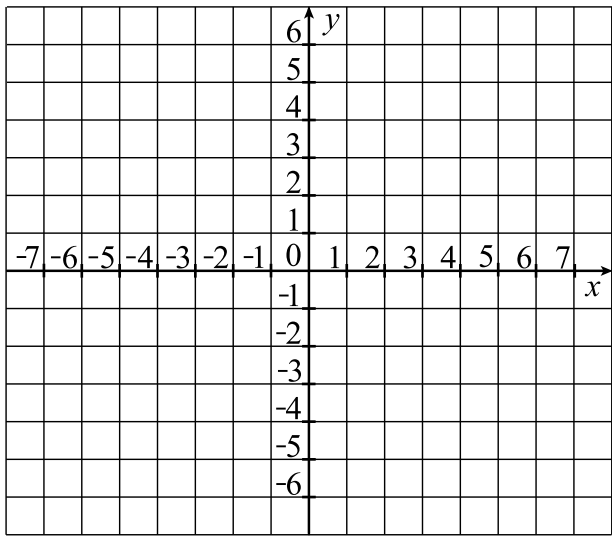
3) $y = (\sqrt{x})^2$



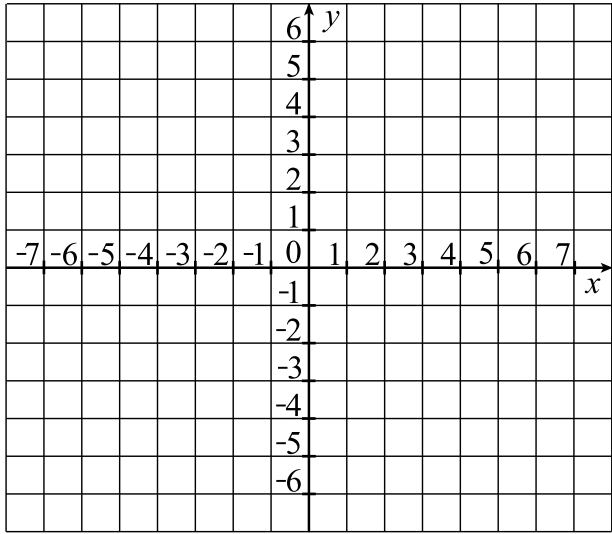
4) $y = -\sqrt{-x}$



5) $y = |\sqrt{x} - 2|$



6) $y = 3 - \sqrt{|x|}$



Задание 14

Для каждого значения параметра a решите уравнение.

1) $a\sqrt{x-2} = a$

Ответ: _____

2) $\sqrt{(a-3)x} = 0$

Ответ: _____

3) $\sqrt{x-3} = a$

Ответ: _____

Задание 15

Преобразуйте выражения.

1) $\sqrt{b^{12}}$

Ответ: _____

2) $\sqrt{a^6}$

Ответ: _____

3) $-b\sqrt{25b^8}$

Ответ: _____

4) $\sqrt{\frac{0,25a^{14}}{b^{12}}}, a > 0$

Ответ: _____

5) $\sqrt{x^4y^6}$

Ответ: _____

6) $ab\sqrt{a^8b^4}$

Ответ: _____

$$7) \frac{a^2}{2-a} \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{4(1-a)}{a^3}}, \text{ если } a > 2$$

Ответ: _____

$$8) \frac{a^2 - 6a + 9}{a + 3} \sqrt{\frac{(a+3)^4}{(a-3)^2}}$$

Ответ: _____

$$9) \frac{x + \sqrt{xy}}{\sqrt{-y}}$$

Ответ: _____

$$10) \frac{\sqrt{(b-5)^4}}{b^2 - 10b + 25}$$

Ответ: _____

$$11) \sqrt{q^2 - 2q + 1} + \sqrt{4q^2 - 12q + 9}, q \leq \frac{3}{2}$$

Ответ: _____

Задание 16

Упростите выражения.

1) $\sqrt{12\sqrt{3} - 21}$

Ответ: _____

2) $\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$

Ответ: _____

3) $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$

Ответ: _____

4) $\sqrt{81 + 8\sqrt{5}}$

Ответ: _____

5) $\sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$

Ответ: _____

6) $\sqrt{15 + 6\sqrt{6}}$

Ответ: _____

$$7) \sqrt{22 + 6\sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$$

Ответ: _____

$$8) \frac{10}{\sqrt{5} - \sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{40} - \sqrt{80}}$$

Ответ: _____

$$9) \frac{\sqrt{5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}} + \sqrt{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}}}{\sqrt{7\sqrt{3} - 2\sqrt{30}}}$$

Ответ: _____

$$10) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1} - \frac{5\sqrt{15} - \sqrt{5} - 16}{7 - 2\sqrt{15}}$$

Ответ: _____

$$11) \left(\frac{8 \cdot (\sqrt{19} - 4)}{\sqrt{17} - 3} - \frac{3 \cdot (\sqrt{17} + 2)}{\sqrt{19} - 4} + 17 + 8\sqrt{17} \right) \cdot (\sqrt{19} + 3)$$

Ответ: _____

Задание 17

Упростите выражения.

$$1) \left(\frac{8\sqrt{x}}{\sqrt{x}+7} - \frac{15\sqrt{x}}{x+14\sqrt{x}+49} \right) : \frac{8\sqrt{x}+41}{x-49} + \frac{7\sqrt{x}-49}{\sqrt{x}+7}$$

Ответ: _____

$$2) \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right)$$

Ответ: _____

$$3) \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\frac{a^2+ab}{a-b}}$$

Ответ: _____

$$4) \sqrt{\frac{y}{y-b^2}} : \left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{y-b^2}}{\sqrt{y}+\sqrt{y-b^2}} - \frac{\sqrt{y}+\sqrt{y-b^2}}{\sqrt{y}-\sqrt{y-b^2}} \right)$$

Ответ: _____

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ



Важно знать:

✓ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ – квадратное уравнение, где a, b, c – числа; x – переменная.

✓ $D = b^2 - 4ac$:

- $D > 0$, уравнение имеет два корня;
- $D = 0$, уравнение имеет один корень;
- $D < 0$, уравнение не имеет действительных корней.

✓ Теорема, обратная теореме Виета: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases},$$

то они являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

✓ Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

✓ Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$

✓ Метод переброски старшего коэффициента:

переброска коэффициента a →	
$ax^2 + bx + c = 0$ $D = b^2 - 4ac$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x^2 + bx + ac = 0$ – приведённое $D = b^2 - 4ac$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2}$

←
Находим корни исходного (делим найденные корни на a)

Задание 18

Решите уравнение.

1) $\frac{1}{7}x^2 - 7 = 0$

Ответ: _____

2) $x^2 + 2|x| = 0$

Ответ: _____

3) $0,8x^2 - 1,25 = 0$

Ответ: _____

4) $4x^2 - \frac{x}{|x|} = 0$

Ответ: _____

5) $16 - 25(3 - 5x)^2 = 0$

Ответ: _____

6) $3x^2 + |x| - 5 = 0$

Ответ: _____

7) $(2x - 1)^2 = 3 - 6x$

Ответ: _____

8) $2\sqrt{2x - 3} + 6x - 9 = 0$

Ответ: _____

9) $2x - \sqrt{x} = 0$

Ответ: _____

10) $\frac{x-3}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = 4\frac{1}{4}$

Ответ: _____

Задание 19

При каких значениях параметра a уравнение:

1) является неполным квадратным.

а) $x^2 + 4a^2x - 4x + 7 = 0$

Ответ: _____

б) $(a - 2)x^2 + 8x - a^2 + 2a = 0$

Ответ: _____

в) $ax^2 + (a^2 + 3a)x - 6 = 0$

Ответ: _____

2) не имеет корней.

а) $x^2 + 2a = 0$

Ответ: _____

б) $a^2x^2 - 16 = 0$

Ответ: _____

в) $x^2 - 4x + 4 = a$

Ответ: _____

г) $a(x^2 - 2x + 1) + 7 = 0$

Ответ: _____

3) имеет корни, равные нулю.

а) $4x^2 + (a - 2)x + 4 - a^2 = 0$

Ответ: _____

б) $(3 + a)x^2 + 3x + a^2 - 9 = 0$

Ответ: _____

4) корни уравнения равны по модулю, но противоположны по знаку.

а) $7x^2 + (a^2 - 4a)x + a + 1 = 0$

Ответ: _____

б) $3x^2 + (a^2 - 9)x + 12 - 4a = 0$

Ответ: _____

Задание 20

Решите уравнение:

1) методом выделения квадрата двучлена.

а) $x^2 + 10x + 13 = 0$

Ответ: _____

б) $x^2 - 8x + 25 = 0$

Ответ: _____

в) $9x^2 - 18x + 8 = 0$

Ответ: _____

г) $-49x^2 - 14x + 5 = 0$

Ответ: _____

2) применяя теорему, обратную теореме Виета.

а) $x^2 - 4x - 21 = 0$

Ответ: _____

б) $x^2 + 10x + 21 = 0$

Ответ: _____

в) $x^2 - 4x - 77 = 0$

Ответ: _____

г) $x^2 + 2x - 15 = 0$

Ответ: _____

3) используя свойства суммы коэффициентов.

а) $54x^2 - 17x - 37 = 0$

Ответ: _____

б) $16x^2 - 23x + 7 = 0$

Ответ: _____

в) $2024x^2 + 2025x + 1 = 0$

Ответ: _____

г) $27x^2 - 49x + 22 = 0$

Ответ: _____

д) $7x^2 - 118x + 111 = 0$

Ответ: _____

4) применяя метод переброски.

а) $3x^2 + 7x + 2 = 0$

Ответ: _____

б) $3x^2 + 2x = 8$

Ответ: _____

в) $9m^2 - 13m - 10 = 0$

Ответ: _____

г) $6x^2 - 25x + 4 = 0$

Ответ: _____

5) используя формулы корней квадратного уравнения.

а) $x^2 - 2x - 7 = 0$

Ответ: _____

б) $14x^2 - 17x - 15 = 0$

Ответ: _____

в) $20x = 3x^2 + 20$

Ответ: _____

г) $7x - 3x^2 + 6 = 0$

Ответ: _____

Задание 21

Решите уравнение методом введения новой переменной.

1)

а) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$

Ответ: _____

б) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Ответ: _____

в) $16z^4 + 15z^2 - 1 = 0$

Ответ: _____

г) $x^4 - x^2 + 0,25 = 0$

Ответ: _____

2)

а) $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) - 14 = 0$

Ответ: _____

б) $8(x^2 + x)^2 - 10x^2 - 10x + 3 = 0$

Ответ: _____

в) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$

Ответ: _____

г) $(x^2 + 6x)^2 - 4(x + 3)^2 = 156$

Ответ: _____

д) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$

Ответ: _____

е) $x(x + 1)(x + 2)(x - 1) = 24$

Ответ: _____

ж) $4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2 = 0$

Ответ: _____

з) $3y^2 + 1 - 2\sqrt{3y^2 + 1} = 0$

Ответ: _____

$$\text{и) } (8x+7)^2(4x+3)(x+1)=4,5$$

Ответ: _____

$$\text{к) } 9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(1-x)=4x\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

Ответ: _____

$$\text{л) } 2x^2-3|x|+1=0$$

Ответ: _____

Задание 22

Решите уравнение.

$$\text{а) } a^2+2a+\frac{7}{a-8}=\frac{7}{a-8}+80$$

Ответ: _____

$$\text{б) } x^2+8(\sqrt{x})^2-33=0$$

Ответ: _____

$$\text{в) } \sqrt{y^2+2y-3}+\sqrt{8y^2-7y-1}=0$$

Ответ: _____

$$\text{г) } \sqrt{36-y^2}+|y^2+5y-6|=0$$

Ответ: _____

$$д) y^2 - 2y + \sqrt{3-y} = \sqrt{3-y} + 8$$

Ответ: _____

$$е) 2x^2 + 9(\sqrt{x+1})^2 - 27 = 0$$

Ответ: _____

$$ж) x^2 - 5x \cdot \frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0$$

Ответ: _____

$$з) x^2 + 6x + 9 + |x^2 + x - 6| = 0$$

Ответ: _____

$$и) (\sqrt{x} - 2)(x^2 + 2x - 24) = 0$$

Ответ: _____

$$к) |x^2 + x - 3| = x$$

Ответ: _____

$$л) |x^2 + x - 1| = 2x + 1$$

Ответ: _____

Задание 23

Известно, что x_1, x_2 корни уравнения $x^2 + 5x - 18 = 0$.

Не решая уравнения, найдите значение выражения.

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Ответ: _____

2) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Ответ: _____

3) $(x_1 - x_2)^2$

Ответ: _____

4) $x_1^3 + x_2^3$

Ответ: _____

5) $x_1^2 + x_2^2$

Ответ: _____

6) $|x_2 - x_1|$

Ответ: _____

Задание 24

При каких значениях параметра a уравнение имеет:

1) единственный корень.

а) $ax^2 - (a+1)x + 3 = 0$

Ответ: _____

б) $(a-2)x^2 + (2a-4)x + 15 = 0$

Ответ: _____

в) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$

Ответ: _____

2) два корня разных знаков.

$$7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$$

Ответ: _____

3) корни, сумма которых равна нулю.

$$x^2 + (a^2 + 2a - 3)x + a = 0$$

Ответ: _____

4) корни, произведение которых равно 5.

$$x^2 + (a + 2)x + a^2 - 4a = 0$$

Ответ: _____

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



Важно знать: $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0; \\ Q(x) \neq 0, \end{cases}$ при условии существования $Q(x)$.

Задание 25

Решите уравнения.

1) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = -\frac{5}{2}$

Ответ: _____

2) $\frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$

Ответ: _____

3) $\frac{2x}{3x^2-x+2} - \frac{7x}{3x^2+5x+2} = 1$

Ответ: _____

4) $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$

Ответ: _____

5) $2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 2 = 0$

Ответ: _____

6) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$

Ответ: _____

$$7) x^2 + x - 4 = \frac{2x - 4}{x^2}$$

Ответ: _____

$$8) \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 1} + \frac{3x + 1}{x + 1} = \frac{x - 1,5}{x - 1}$$

Ответ: _____

$$9) \left(\frac{3y - 2}{4y + 3} \right)^2 + \left(\frac{3y + 2}{4y - 3} \right)^2 = 2 \cdot \frac{9y^2 - 4}{16y^2 - 9}$$

Ответ: _____

$$10) 2 \left(\frac{x - 1}{x + 2} \right)^2 - \left(\frac{x + 1}{x - 2} \right)^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Ответ: _____

$$11) x^3 + \frac{1}{x^3} = 6 \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Ответ: _____

$$12) \frac{2y + 1}{y - 3} + \frac{5}{y + 4} = \frac{7}{y - 3} + \frac{y + 9}{y + 4} + \frac{12}{y^3 + y^2 - 12y + 12}$$

Ответ: _____

$$13) \frac{y^2 + 2y + 1}{y^2 + y + 1} - \frac{3y}{y^2 + 2y + 1} = 1$$

Ответ: _____

$$14) \frac{3 - 5y^3}{y} = 3y - 5$$

Ответ: _____

$$15) \frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2} - \frac{8}{3}$$

Ответ: _____

$$16) y(y + 3,5) + \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} + 3,5 \right) = 0$$

Ответ: _____

$$17) 20 \left(\frac{y-2}{y+1} \right)^2 - 5 \left(\frac{y+2}{y-1} \right)^2 + 48 \left(\frac{y^2-4}{y^2-1} \right) = 0$$

Ответ: _____

$$18) \left(\frac{x+6}{x-6} \right) \left(\frac{x+4}{x-4} \right)^2 + \left(\frac{x-6}{x+6} \right) \left(\frac{x+9}{x-9} \right)^2 = 2 \cdot \frac{x^2+36}{x^2-36}$$

Ответ: _____

Задание 26

Для каждого значения параметра a решите уравнения.

1) $\frac{x^2 - 9x + 8}{x + a} = 0$

Ответ: _____

2) $\frac{x^2 - (4a + 3)x + 12a}{x - 5} = 0$

Ответ: _____

3) $\frac{a(x + a)}{x + 2} = 0$

Ответ: _____

4) $\frac{x}{2a} + \frac{3}{x - 3} = \frac{3x - 2a}{2(x - a)}$

Ответ: _____

5) $\frac{x}{x - a} - \frac{3a}{x + a} = \frac{11a^2}{x^2 - a^2}$

Ответ: _____

$$6) \frac{x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 + 5a - 3}{x^2 - 7x + 6} = 0$$

Ответ: _____

$$7) \frac{x^2 - (a + 3)x + 5a - 10}{\sqrt{x - 2}} = 0$$

Ответ: _____

$$8) \frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

Ответ: _____

$$9) \frac{x^2 - (3 - a)x + 3a - 2a^2}{x^2 - 9} = 0$$

Ответ: _____



Важно знать:

В процессе решения задачи выделяются этапы:

- ✓ Составление математической модели (введение переменных; описание всех величин, возникающих в ходе решения, а также указание их единиц измерения).
- ✓ Работа с математической моделью (решение уравнения, построение графиков, рассмотрение свойств функции...).
- ✓ Интерпретация результатов.
- ✓ Ответ на вопрос задачи.

Задание 27

Решите задачи.

- 1) Моторная лодка прошла против течения реки 112 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

- 2) Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 40 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 21:00 того же дня. Определите (в км/час) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Ответ: _____

3) Пристани А и В расположены на озере, расстояние между ними 270 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из А в В. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 1 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 3 часа. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость баржи на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____

ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМИ



Важно знать:

$a < b$, если $a - b < 0$; $a > b$, если $a - b > 0$.

Если $a < b$, то $b > a$; если $a > b$, то $b < a$.

Если $a < b$, $b < c$, то $a < c$.

Если $a < b$, $c \in \mathbb{R}$, то $a + c < b + c$.

Если $a < b$, $c > 0$, то $ac < bc$.

Если $a < b$, $c < 0$, то $ac > bc$.

Если $0 < a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$.

Если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Если $a \geq 0$, $b \geq 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Задание 28

Верно ли?

1) Если $a > 3$, $b > 6$, то $a + b > 8$	Ответ: _____
2) Если $a > 3$, $b > 6$, то $a + b > 9,1$	Ответ: _____
3) Если $a > 3$, $b > 6$, то $a - b > -3$	Ответ: _____
4) Если $a > 3$, $b > 6$, то $ab > 17$	Ответ: _____
5) Если $a > 3$, $b < -6$, то $a - b > 9$	Ответ: _____
6) Если $a > 3$, то $a^2 > 9$	Ответ: _____
7) Если $a < 3$, то $a^2 < 9$	Ответ: _____
8) Если $a > 3$, то $a^2 > 3a$	Ответ: _____
9) Если $a < -3$, то $a^2 < 3a$	Ответ: _____
10) Если $a > -3$, то $a^2 > -3a$	Ответ: _____

Задание 29

Известно, что $a < b$. Расположите в порядке убывания числа.

1) a ; $a - 2,65$; $b + 0,05$; b ; $a - 2\frac{2}{3}$

Ответ: _____

2) a ; $a - 0,42$; $b + 2,4$; b ; $a - \frac{3}{7}$

Ответ: _____

Задание 30

Сколько целых значений может принимать переменная x , если:

1) $3\frac{1}{4} < \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x} < 3\frac{1}{2}$

Ответ: _____

2) $1\frac{1}{4} < \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x} < 1\frac{1}{2}$

Ответ: _____

Задание 31

Выясните, является ли число a положительным или отрицательным.

1) $11a > 3a$

Ответ: _____

2) $4a < 13a$

Ответ: _____

3) $-3a + 8 > -a + 8$

Ответ: _____

4) $-7a + 2 < -2a + 2$

Ответ: _____

Задание 32

Верно ли, что при любом значении переменной a является истинным неравенство?

1) $(2a-1)(3a+2)-(2a+1)(2a-3) > a(a+5)$

Ответ: _____

2) $(5a-2)(3a+1)-(a-4)(a+4) > 7a^2 - a + 14$

Ответ: _____

Задание 33

А) Известно, что $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ и $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$. Оцените значение выражения.

1) $\sqrt{3} + 2$

Ответ: _____

2) $1 - \sqrt{7}$

Ответ: _____

3) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$

Ответ: _____

4) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

Ответ: _____

5) $\sqrt{21}$

Ответ: _____

6) $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

Ответ: _____

7) $\sqrt{12} - \sqrt{7}$

Ответ: _____

8) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{75}}$

Ответ: _____

9) $\frac{\sqrt{48} - \sqrt{7}}{\sqrt{21}}$

Ответ: _____

10) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{7}}$

Ответ: _____

11) $\sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$

Ответ: _____

12) $\frac{5}{\sqrt{63 - 36\sqrt{3}}}$

Ответ: _____

Б) Известно, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ и $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцените значение выражения.

1) $7 + \sqrt{5}$

Ответ: _____

2) $1 - \sqrt{2}$

Ответ: _____

3) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

Ответ: _____

4) $\sqrt{2} - \sqrt{5}$

Ответ: _____

5) $\sqrt{10}$

Ответ: _____

6) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$	Ответ: _____
7) $\sqrt{50} - \sqrt{49}$	Ответ: _____
8) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{98}}$	Ответ: _____
9) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$	Ответ: _____
10) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$	Ответ: _____
11) $\frac{7}{\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}}$	Ответ: _____
12) $\frac{\sqrt{72} - \sqrt{5}}{\sqrt{10}}$	Ответ: _____

Задание 34

Сравните значения выражений.

1) $\sqrt{14} - \sqrt{3}$ и $\sqrt{13} + 2$	Ответ: _____
2) $\sqrt{18} + \sqrt{6}$ и $3\sqrt{3} + \sqrt{5}$	Ответ: _____
3) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$ и $6\sqrt{6}$	Ответ: _____

Задание 35

А) Зная, что $2 < a < 3$ и $3 < b < 4$, оцените значение выражения.

1) $2a + b$	Ответ: _____
2) $b - 2a$	Ответ: _____
3) $5ab$	Ответ: _____
4) $\frac{a^2}{3b}$	Ответ: _____

Б) Зная, что $4 < a < 5$ и $9 < b < 10$, оцените значение выражения.

1) $2a + b$	Ответ: _____
2) $b - 3a$	Ответ: _____
3) $-2ab$	Ответ: _____
4) $\frac{a^2}{2b - a}$	Ответ: _____

Задание 36

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $a - ab$.

1) $-2 \leq a \leq -\frac{1}{7}$ и $1,7 \leq b \leq 2,8$	Ответ: _____
--	--------------

$$2) -3 \leq a \leq -0,5 \text{ и } 0,5 \leq b \leq \frac{2}{3}$$

Ответ: _____

Задание 37

Докажите, что если $a > 0$, то:

$$1) \frac{3a+2}{4} \geq \frac{6a}{3a+2}$$

$$2) \frac{4a}{2a+1} \leq \frac{2a+1}{2}$$

Задание 38

Решите неравенства.

$$1) \frac{8x+3}{16} - \frac{2x-5}{3} \geq \frac{11-7x}{12}$$

Ответ: _____

$$2) (4x-3)^2 + (7x+1)^2 < (5x-4)(13x+1)$$

Ответ: _____

$$3) \frac{1}{3}x(x+3) - 4x - 1,5 < \frac{x^2}{3} - 3x + 2,5$$

Ответ: _____

$$4) 4x(x-1) - 2(x-2)(x-3) < 2x^2$$

Ответ: _____

$$5) (\sqrt{24} - 5)x \leq 2$$

Ответ: _____

$$6) (3\sqrt{6} - 2\sqrt{14})x > -3$$

Ответ: _____

$$7) -\frac{14}{2-3x} < 0$$

Ответ: _____

$$8) \frac{1-\sqrt{2}}{4-5x} \geq 0$$

Ответ: _____

Задание 39

Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

$$1) \left(\frac{3}{8} - 0,4 \right) x < \left(0,4 - \frac{3}{8} \right)$$

Ответ: _____

$$2) \frac{1-x}{2} + 3 < 3x - \frac{2x+1}{4}$$

Ответ: _____

Задание 40

Решите неравенство и найдите все его решения, являющиеся натуральными числами.

$$4 - x - \frac{3-x}{2} > \frac{1-x}{4} - \frac{2-x}{3}$$

Ответ: _____

Задание 41

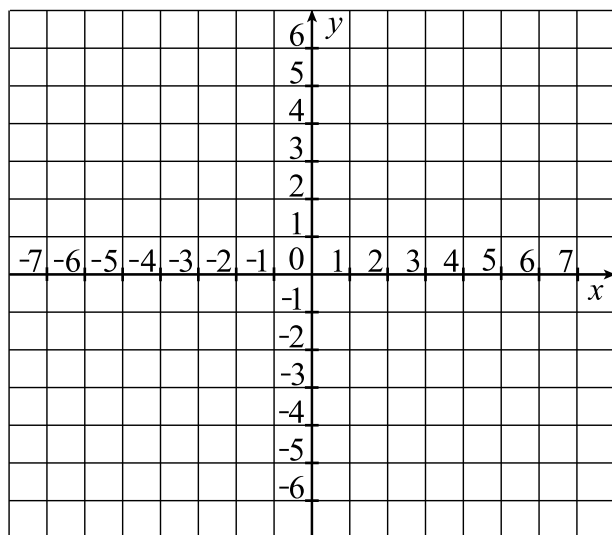
1) При каких значениях аргумента график функций $y = \frac{2x}{3} - 2$ находится выше графика функций $y = 8 - x$?

Ответ: _____

2) При каких значениях аргумента график функций $y = -\frac{x}{2} + 3,5$ находится ниже графика функций $y = 2x - 4$?

Ответ: _____

3) При каких значениях аргумента график функций $y = \frac{2x}{3} + 2$ находится выше графика функций $y = 2|x - 4| + 2$? Воспользуйтесь графическим методом.



Ответ: _____

Задание 42

А) Для каждого значения параметра a решите неравенство.

1) $(3a - 6)x > 8$

Ответ: _____

2) $ax \geq a^2 + 3a$

Ответ: _____

$$3) (a-4)x \leq 16 - a^2$$

Ответ: _____

$$4) 2x + 5 > ax - 7$$

Ответ: _____

$$5) 4x \geq a^2x + a^2 + 5a + 6$$

Ответ: _____

$$6) 5a + 2x < (2-a)x - 4a + a^2$$

Ответ: _____

$$7) 2|x-2| \geq a-4$$

Ответ: _____

$$8) a|x+2| < a^2$$

Ответ: _____

Б) При каких значениях параметра a неравенства имеют одинаковое множество решений?

$$1) 2ax + 3 < x + 2 \text{ и } x > \frac{1}{1-2a}$$

Ответ: _____

2) $ax - 1 > x + 3$ и $(2a - 5)x > 3$

Ответ: _____

3) $(a - 2)x \leq 4 - a^2$ и $|a - 2|x > 4 - a^2$

Ответ: _____

4) $(a - 3)x \geq 9 - a^2$ и $|3 - a|x > 9 - a^2$

Ответ: _____

Задание 43

Решите двойное неравенство и укажите целые числа, которые являются его решениями.

1) $1,5 < \frac{3+y}{3} < 2,5$

Ответ: _____

2) $0 < \frac{3y-2}{4} < 1$

Ответ: _____

3) $3x^2 - 4x + 3 \leq 3x^2 - 5x + 5 \leq 3x^2 - 3x + 4$

Ответ: _____

4) $9x^2 - 2 \leq (3x + 2)^2 \leq 9x^2 + 2$

Ответ: _____

Задание 44

При каких значениях переменной значение дроби $\frac{5+2y}{6}$ будет принадлежать промежутку:

1) $(-5; 6)$

Ответ: _____

2) $(-3; 2]$

Ответ: _____

Задание 45

Укажите множество допустимых значений переменной в выражении.

1) $\sqrt{2x-3} + \frac{2x+7}{\sqrt{5-4x}}$

Ответ: _____

2) $\frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{x}}{x-1}$

Ответ: _____

3) $\frac{x}{\sqrt{0,4-6x} - \sqrt{3x-0,1}}$

Ответ: _____

4) $\frac{\sqrt{1,7x+1} - \sqrt{0,4x+3}}{\sqrt{x}}$

Ответ: _____



Важно знать:

- ✓ Множество решений системы неравенств – пересечение множеств решений неравенств, входящих в систему.
- ✓ Множество решений совокупности неравенств – объединений множеств решений неравенств, входящих в совокупность.

$$\checkmark \quad |P(x)| < Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) < Q(x); \\ P(x) > -Q(x). \end{cases}$$

$$\checkmark \quad |P(x)| > Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) > Q(x); \\ P(x) < -Q(x). \end{cases}$$

$$\checkmark \quad |P(x)| < |Q(x)| \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x).$$

Задание 46

Решите систему/совокупность неравенств.

$$1) \begin{cases} 9(y+3) < 5(y+1) + 6(y+2); \\ 2(y-18) < 7y - 3(2y+3). \end{cases}$$

Ответ: _____

$$2) \begin{cases} (y+6)^3 - y^2(y+18) > y+2; \\ 0,6(y-1) > 0,5(1+y). \end{cases}$$

Ответ: _____

$$3) \begin{cases} \frac{5+y}{3} - 2y < 0; \\ \frac{y}{4} - \frac{2}{3}(y-5) > \frac{y-8}{6}. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$4) \begin{cases} \frac{y-3}{4} - y < \frac{1}{3}(1-y); \\ 2y-5 > \frac{y+1}{6} + \frac{1}{3}y. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$5) \begin{cases} 15 - 6(3y-1) > 0,5(4y-2); \\ \frac{1}{3}(2y+1) < y; \\ \frac{2y+1}{7} - \frac{3y-1}{14} > 0. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$6) \begin{cases} (6y-1)(y+2) - 6y^2 < 0; \\ \frac{1}{3}(y-1) < \frac{y}{12}; \\ 5(y-2) > 2(3y-4). \end{cases}$$

Ответ: _____

$$7) \begin{cases} \frac{3-y}{3} + 1 \leq \frac{2y-1}{5}; \\ y-1 > 5y-4. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$8) \begin{cases} \frac{3y-2}{4} > \frac{1-5y}{6}; \\ 3y-1 \leq 3-2y. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$9) \begin{cases} -3 < 2y-1 < 7; \\ \begin{cases} 3y+2 \leq y; \\ 2y-1 \geq y+2. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: _____

$$10) \begin{cases} 1+2y \geq 7-y; \\ \frac{y}{5}-1 < 0; \\ -3 < 4-y < 3. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$11) \begin{cases} (3-2x)(\sqrt{5}-3) > 0; \\ 0,3x < 3. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$12) \begin{cases} (3-\sqrt{11})x < \frac{4}{3+\sqrt{11}}; \\ x^2+25 > (x+5)^2. \end{cases}$$

Ответ: _____

Задание 47

Решите систему/совокупность неравенств.

$$1) \begin{cases} \left| \frac{2x}{3} + 1 \right| > 3; \\ |3x - 7| \leq 2. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$2) \begin{cases} 5 - 3|2x - 1| < -1; \\ 2,5 + \left| \frac{x}{2} + 1 \right| \geq 4. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$3) \begin{cases} 2|x| \geq 3; \\ 1 - 2|3x + 1,5| \geq -5. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$4) \begin{cases} |3 - 2x| \geq 1; \\ \frac{x^2}{x + 2} \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$5) \begin{cases} 3|2x+5|-1,5 \leq 1; \\ \left| \frac{x-1}{3} \right| + 0,5 \geq 1, (4); \\ |2x+1| > 3. \end{cases}$$

Ответ: _____

$$6) \begin{cases} \frac{3-|x-1|}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{|x-1|}{6}, \\ 2\left| \frac{2x}{3} - 1 \right| \geq 1,5; \\ 1 - |5-2x| \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: _____

СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ



Важно знать:

- ✓ *Определение:* a, b – любые числа, n, m, k – натуральные числа.

$$a^n = \underbrace{aaa \dots a}_{n \text{ раз}}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

- ✓ *Свойства степеней с одинаковыми основаниями:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

- ✓ *Свойства степеней с одинаковыми показателями:*

$$a^k \cdot b^k = (ab)^k$$

$$a^k : b^k = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Задание 48

Сравните.

1) $\left(\frac{0,136}{603,2}\right)^7$ и $\left(\frac{60,32}{0,0136}\right)^{-8}$

Ответ: _____

2) $\left(\frac{863,2}{0,689}\right)^{-9}$ и $\left(\frac{0,0689}{86,32}\right)^{10}$

Ответ: _____

3) 7^{-476} и 50^{-238}

Ответ: _____

4) 6^{-540} и 37^{-270}

Ответ: _____

Задание 49

Вычислите.

1) $\frac{5^{13} \cdot 2^{-9}}{0,25^7 \cdot 0,008^{-4}} =$

Ответ: _____

2) $\frac{0,625^5 \cdot 5^{10}}{0,04^{-3} \cdot 2^{-14}} =$

Ответ: _____

3) $\left(3\frac{17}{19}\right)^3 \cdot \left(\frac{74}{19}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{17}{19}\right)^0 =$

Ответ: _____

Задание 50При каком значении переменной x верно равенство?

1) $\frac{4^{2x-1} \cdot 3^{3x}}{12^{3x}} = 1$

Ответ: _____

2) $\frac{3^{x-1} \cdot 2^{2x}}{6^{2x}} = 1$

Ответ: _____

Задание 51

Упростите выражение.

1) $\frac{12^{n+1}}{3^n \cdot 2^{2n+1}}$

Ответ: _____

2) $\frac{6^n}{3^{n+1} \cdot 0,5^{1-n}}$

Ответ: _____

3) $\frac{75^{n+4}}{2^{n-2} \cdot 5^{2n+3}}$

Ответ: _____

4) $\frac{45^{n+4}}{5^{n-2} \cdot 3^{2n+3}}$

Ответ: _____

5) $\frac{7^{n+2} - 7^{n-2}}{2 \cdot 7^n}$

Ответ: _____

6) $\frac{11^{n+1} - 11^{n-1}}{5 \cdot 11^n}$

Ответ: _____

7) $\frac{4^{n+2} \cdot 15^{n+1}}{6^n \cdot 10^{n+3}}$

Ответ: _____

8) $\frac{77^{n+2} \cdot 6^{n+1}}{33^n \cdot 14^{n+3}}$

Ответ: _____

Задание 52

1) Найдите все значения переменной, при которых выражение

$$\left(\frac{8m^3 - 2m}{1 + 8m^3} + (4m^2 - 2m + 1)^{-1} \right) : (2m - 1)^{-2} \text{ принимает значение } \left(\frac{1}{3} \right)^{-2}.$$

Ответ: _____

2) Найдите все значения переменной, при которых выражение

$$\left(\frac{a^3 - a}{1 + 3a^3} + (a^2 - a + 1)^{-1} \right) : (|a| - 1)^{-2} \text{ принимает значение } (-2)^{-2}.$$

Ответ: _____

Задание 53

Упростите выражение.

$$1) \left(\frac{1}{\sqrt{a^{-1}} \cdot (\sqrt{a} - 6)} - \frac{3}{\sqrt{a+6}} + \frac{a}{36-a} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}-6} \right)^{-1} =$$

Ответ: _____

$$2) \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}} - \frac{a-a^{-2}}{\sqrt{a}-(\sqrt{a})^{-1}} + \frac{1-a^{-2}}{\sqrt{a}+(\sqrt{a})^{-1}} + \frac{2}{a\sqrt{a}} =$$

Ответ: _____

$$3) \left(\frac{1}{a+\sqrt{2}} - \frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}} \right) : \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a} \right)^{-1} =$$

Ответ: _____

$$4) \left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}} - (1-a)^{-1} \right) \cdot \frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}} =$$

Ответ: _____

$$5) \left(\sqrt{ab} - ab(a+\sqrt{ab})^{-1} \right) : \left(2(\sqrt{ab}-b)(a-b)^{-1} \right)^{-1} =$$

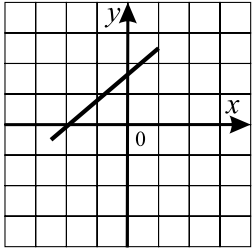
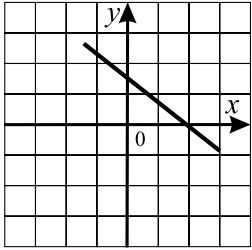
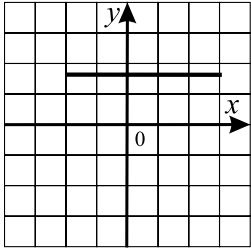
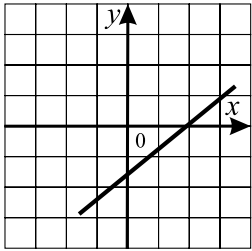
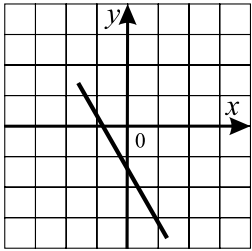
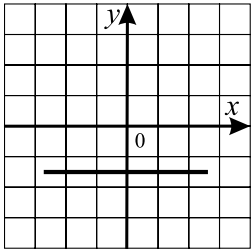
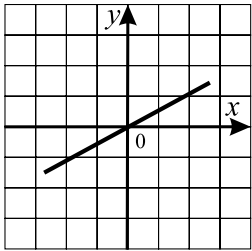
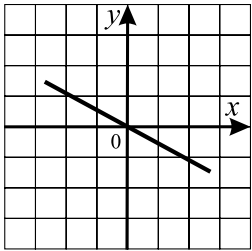
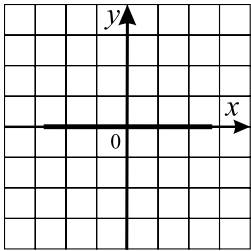
Ответ: _____

ГРАФИКИ И ФУНКЦИИ

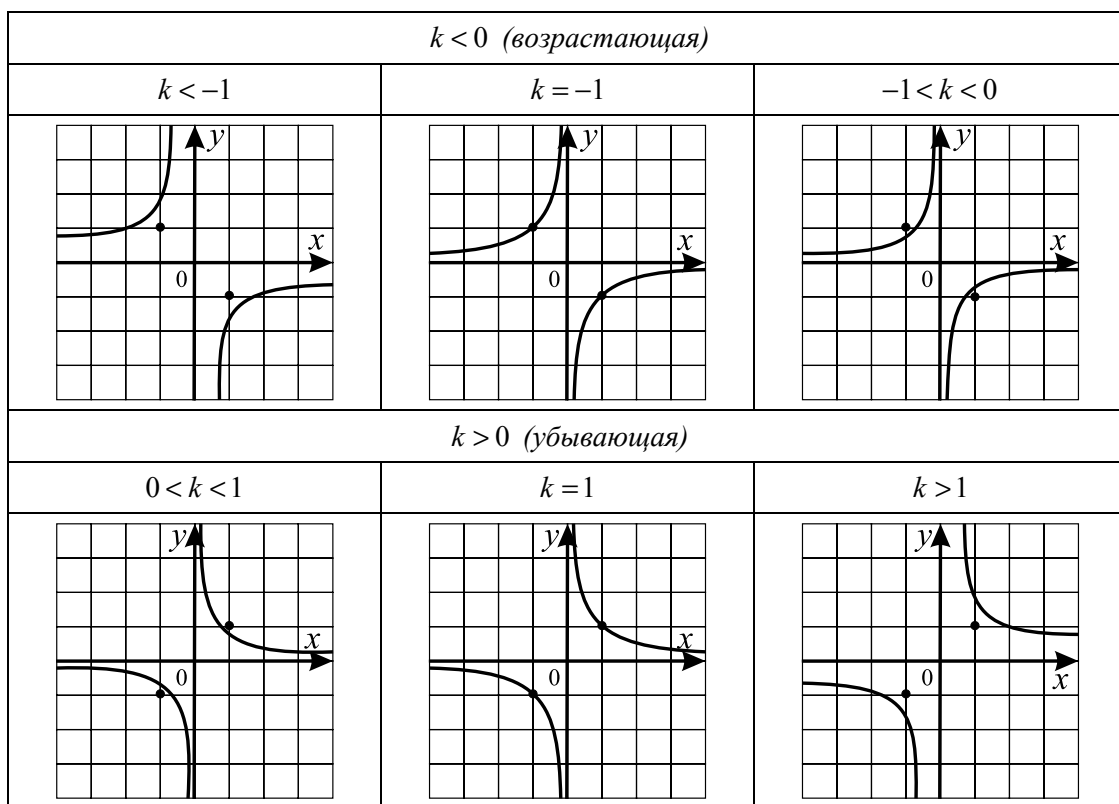


Важно знать:

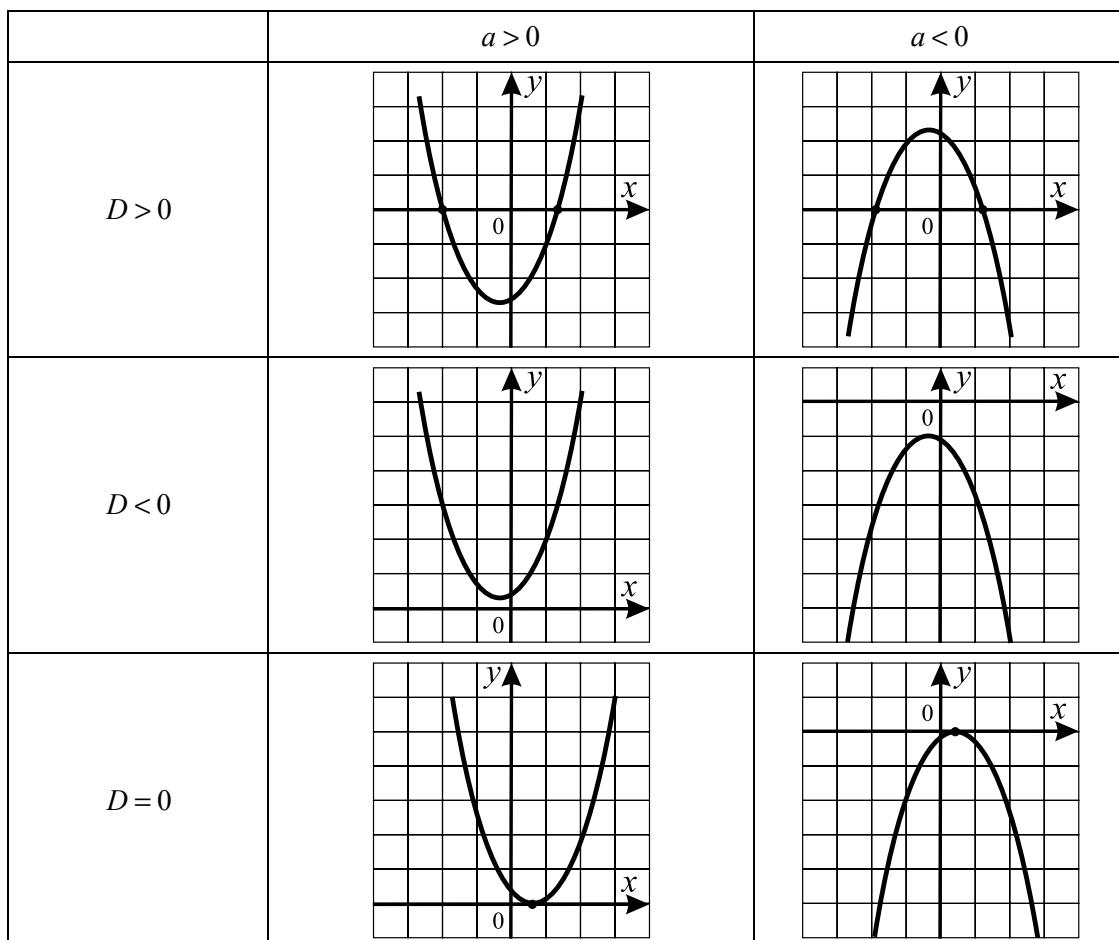
- ✓ График функции $y = k \cdot f(x)$ при $k > 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси y исходного графика в k раз, а при $0 < k < 1$ – сжатием вдоль оси y графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз.
- ✓ График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси x .
- ✓ График функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси y на $|n|$ единиц вверх, если $n > 0$, или вниз, если $n < 0$.
- ✓ График функции $y = f(x - t)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси x на $|t|$ единиц вправо, если $t > 0$, или влево, если $t < 0$.
- ✓ Линейная функция $y = kx$.

	$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$
$b > 0$			
$b < 0$			
$b = 0$			

✓ Функция обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$.

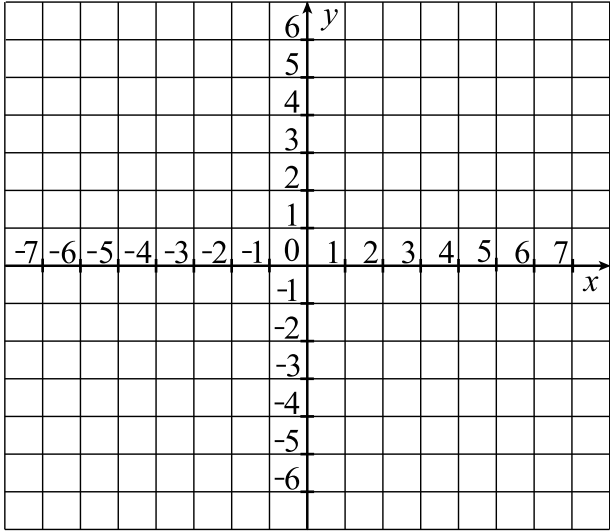


✓ Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, $D = b^2 - 4ac$.

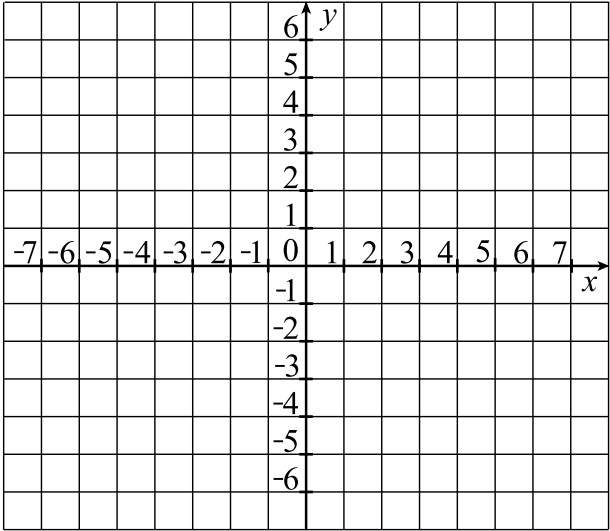


Задание 54
Изобразите схематически график функции.

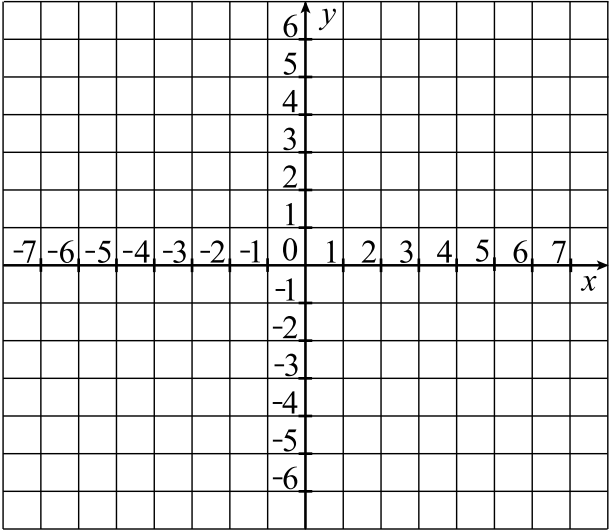
1) $y = 3x^2$



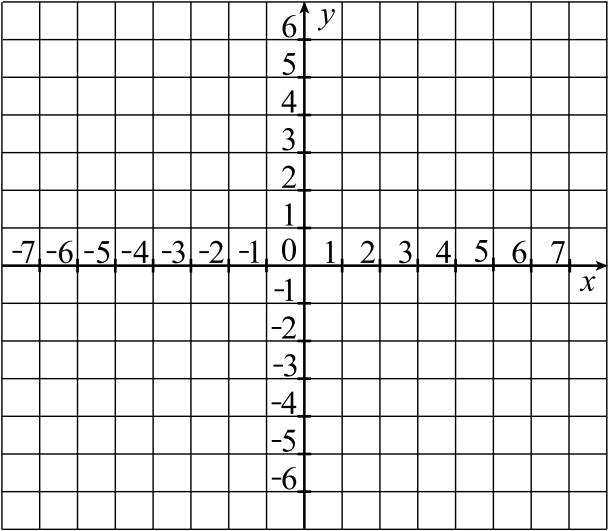
2) $y = \frac{-3}{x}$



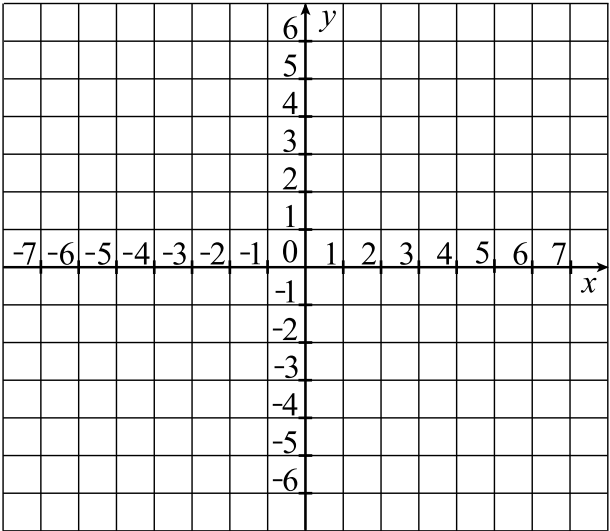
3) $y = -2|x|$



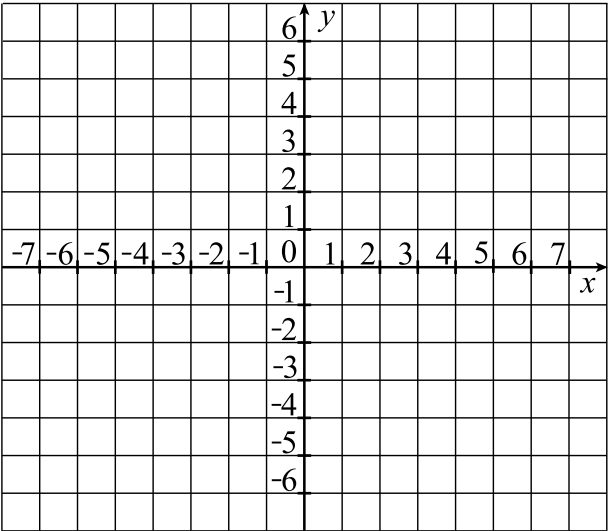
4) $y = -\frac{1}{3}x^2$



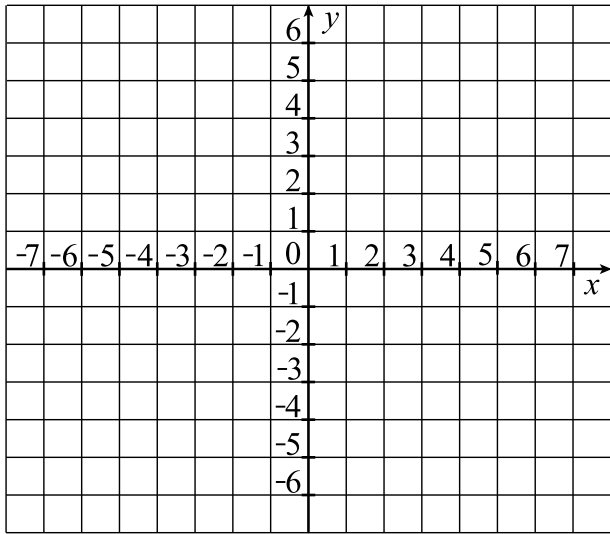
5) $y = \frac{1}{2x}$



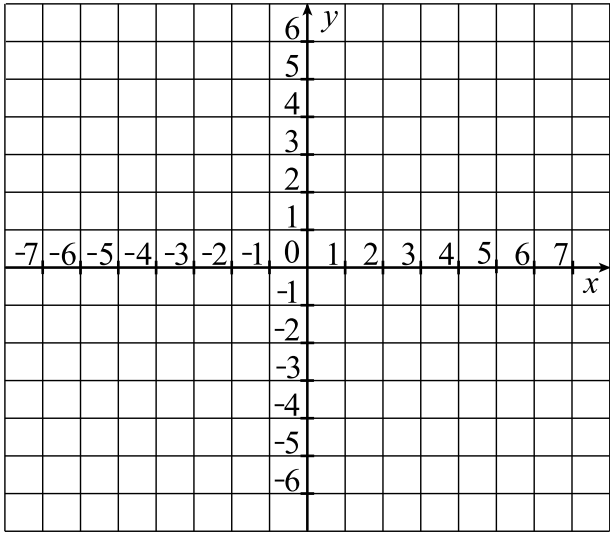
6) $y = -\frac{1}{2}|x|$



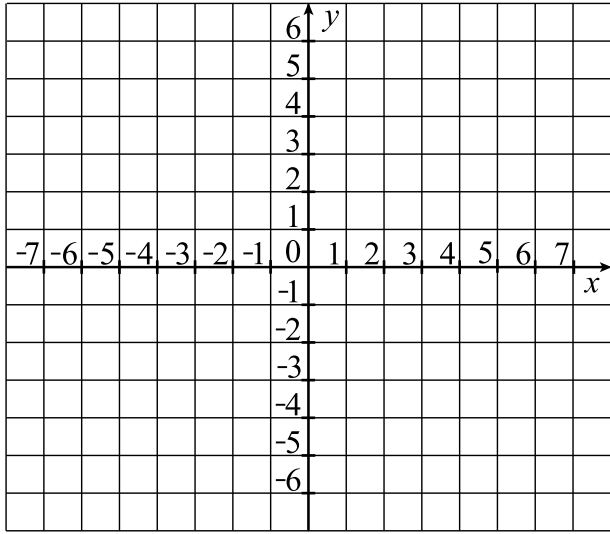
7) $y = x^2 - 3$



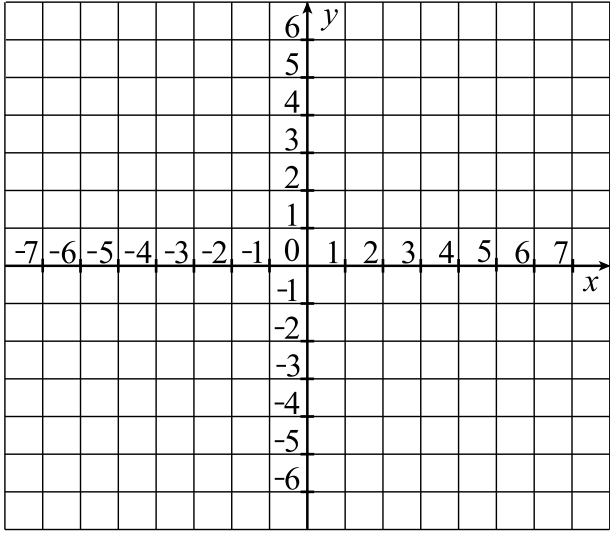
8) $y = \frac{1}{x} - 2$



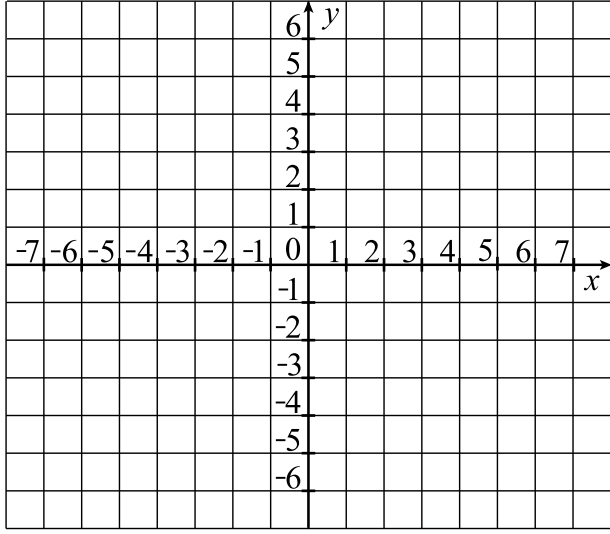
9) $y = |x| - 4$



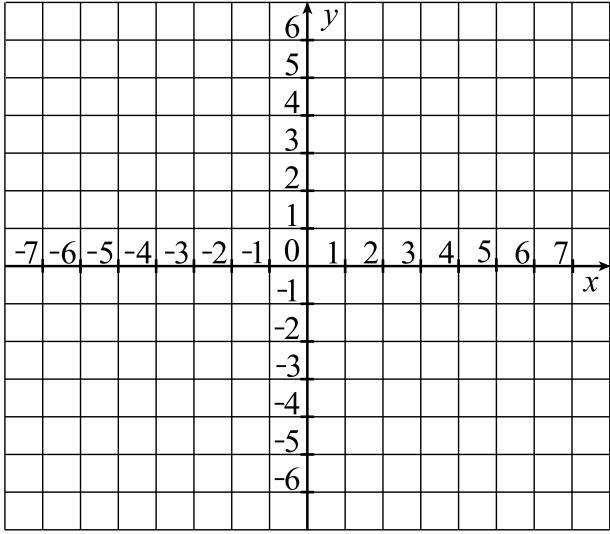
10) $y = (x - 3)^2$



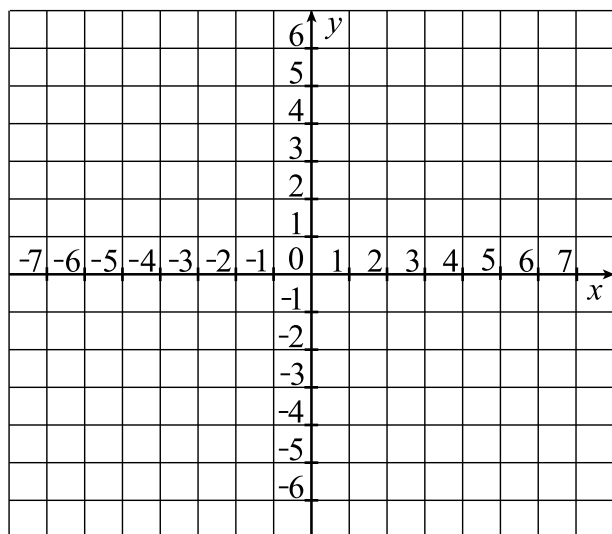
11) $y = \frac{1}{x + 3}$



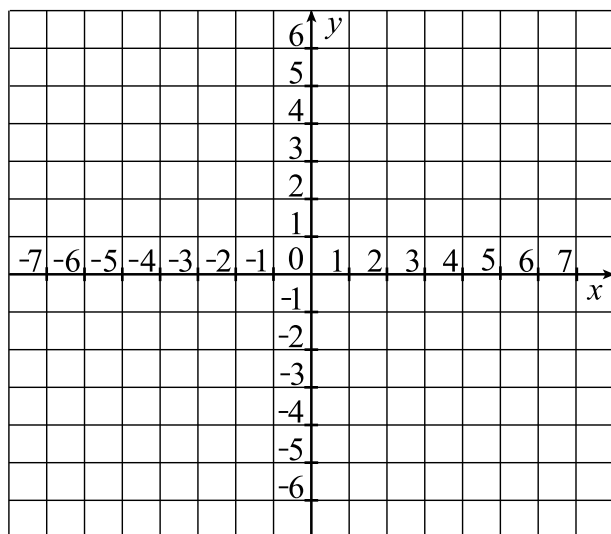
12) $y = |x - 3|$



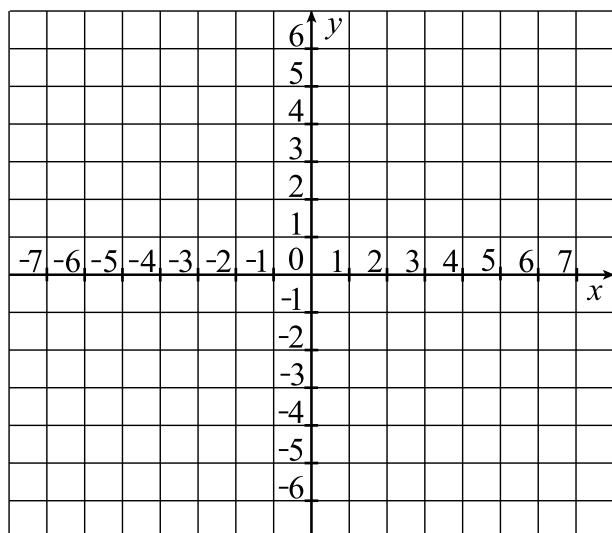
$$13) y = \frac{1}{5}(x+5)^2 - 5$$



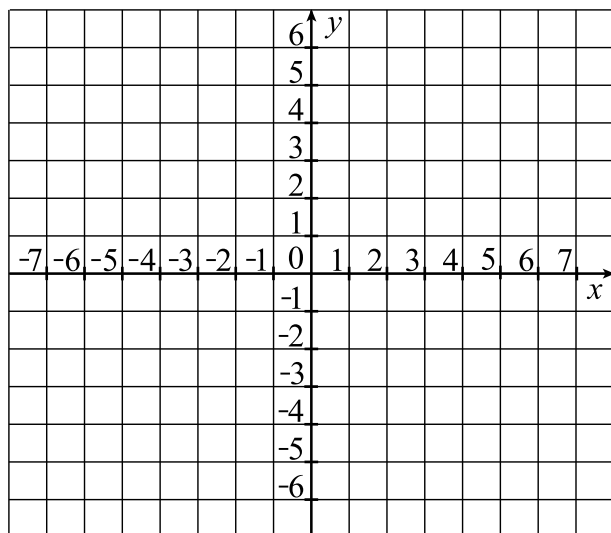
$$14) y = \frac{-3}{x-2} + 3$$



$$15) y = 2|x+2| + 4$$



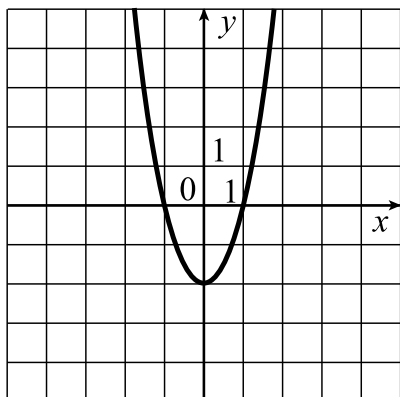
$$16) y = -3(x-2)^2 + 5$$



Задание 55

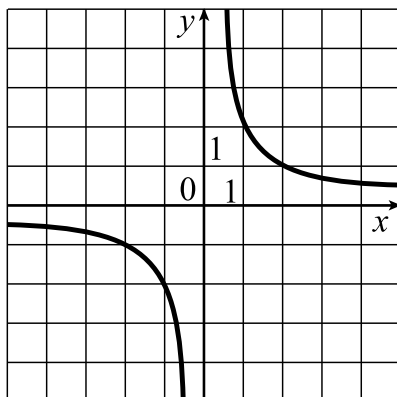
Задайте уравнением каждую из функций, графики которых изображены на рисунках.

1)



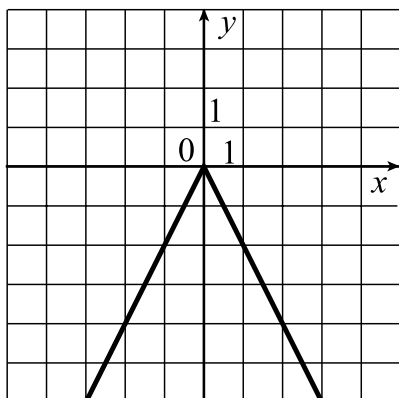
$y =$ _____

2)



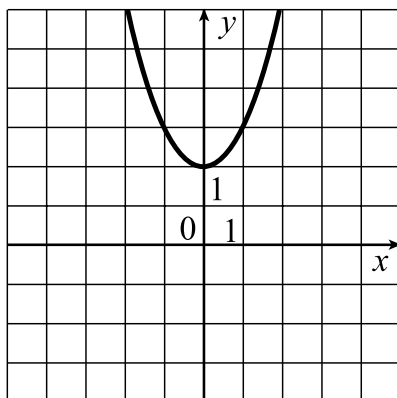
$y =$ _____

3)



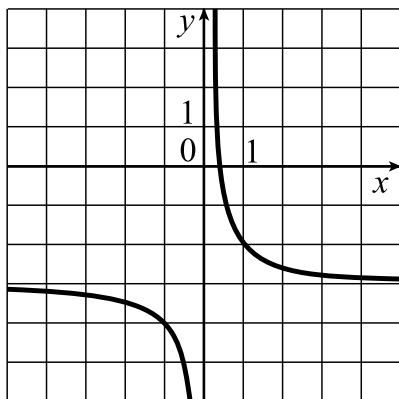
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

4)



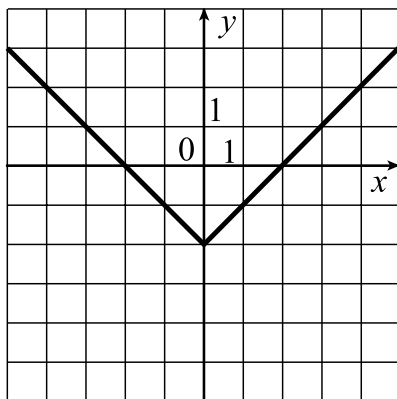
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

5)



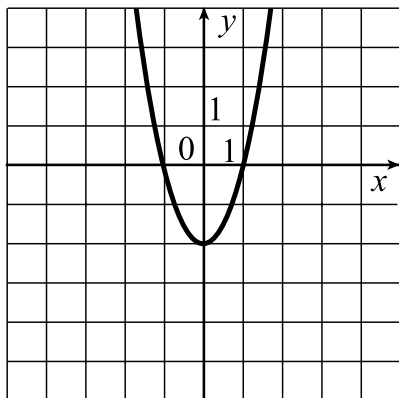
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

6)



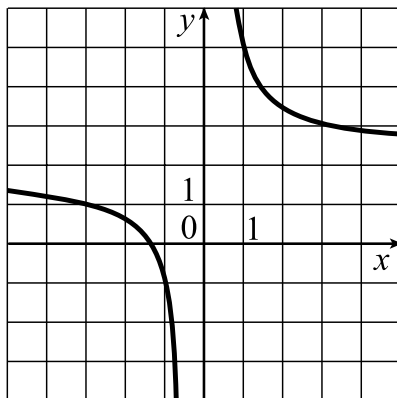
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

7)



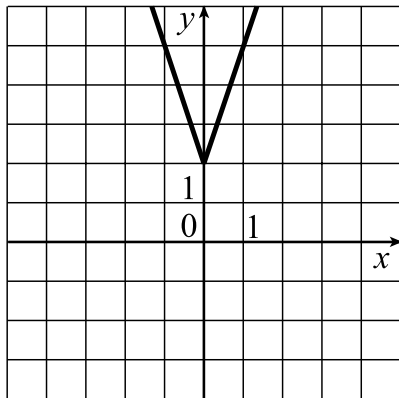
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

8)



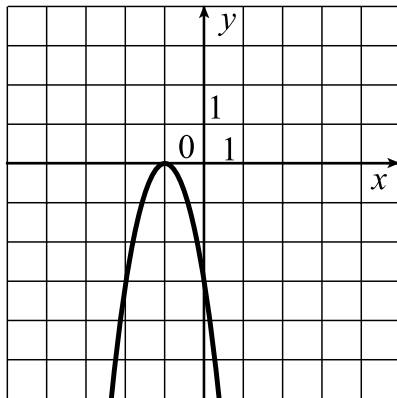
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

9)



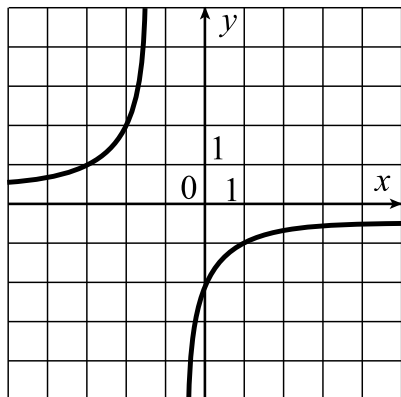
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

10)



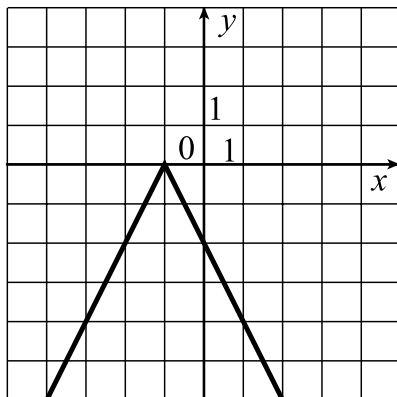
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

11)



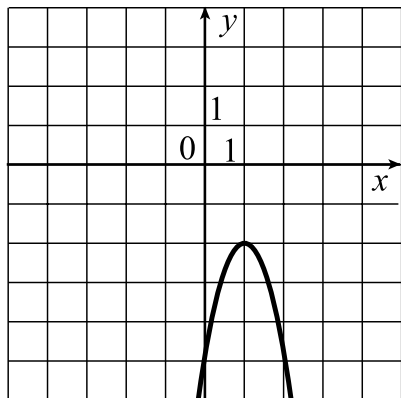
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

12)



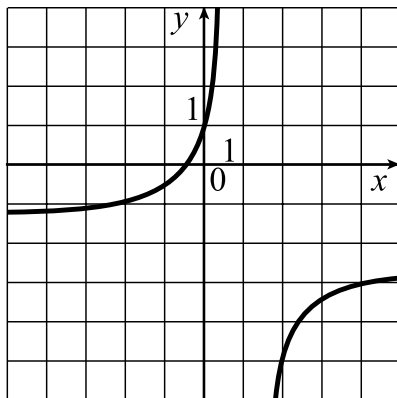
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

13)



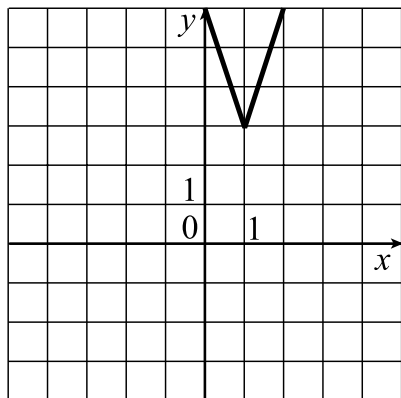
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

14)



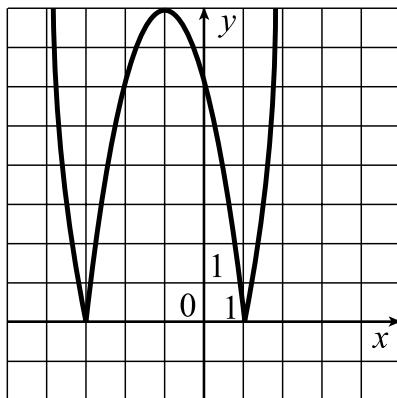
$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

15)



$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

16)



$$y = \underline{\hspace{2cm}}$$

Задание 56

Найдите область определения функции.

1) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+4)}$

Ответ: _____

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-3)(x-5)}}$

Ответ: _____

3) $f(x) = \frac{7x+2}{\sqrt{x^2+x}}$

Ответ: _____

4) $f(x) = \frac{\sqrt{6x-18} + \sqrt{x+2}}{x-5}$

Ответ: _____

5) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+11}{25-x^2}}$

Ответ: _____

6) $f(x) = \sqrt{\frac{|x|-3}{|x|+3}}$

Ответ: _____

7) $f(x) = \sqrt{\frac{|x+1|-3}{|3-x|-1}}$

Ответ: _____

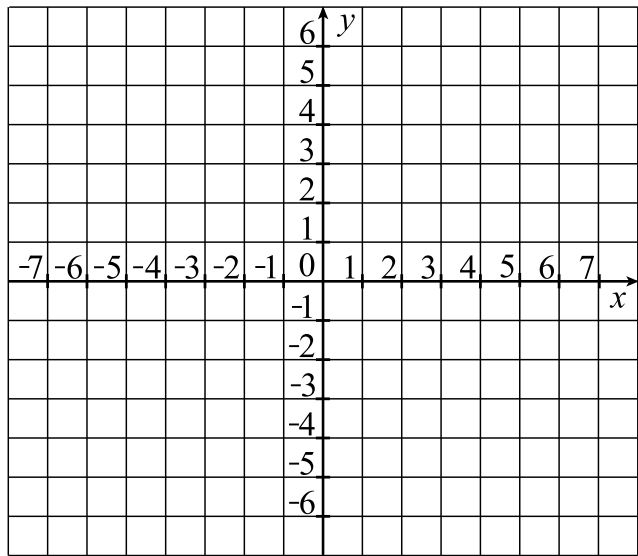
8) $f(x) = \frac{\sqrt{5x-10} + \sqrt{8-x}}{x-6}$

Ответ: _____

Задание 57

1) Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x < 3; \\ -2x - 6, & \text{если } -3 \leq x \leq 1; \\ 5x + 1, & \text{если } x > -1. \end{cases}$

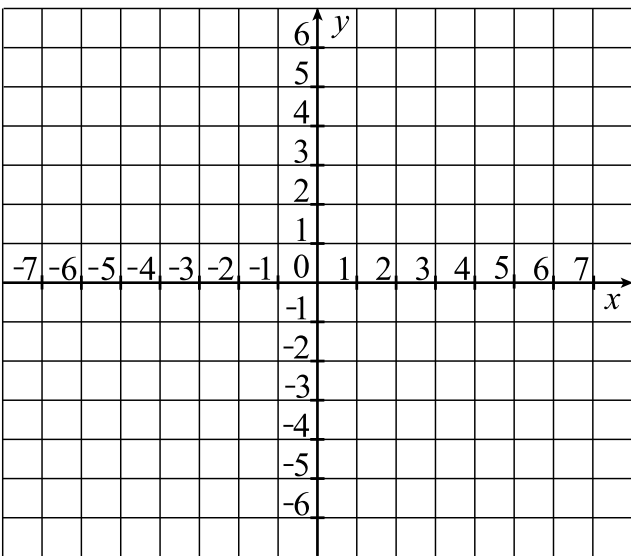
Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно три общие точки.



Ответ: _____

2) Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5, & \text{если } x \geq 1; \\ 3x - 3, & \text{если } x < 1. \end{cases}$

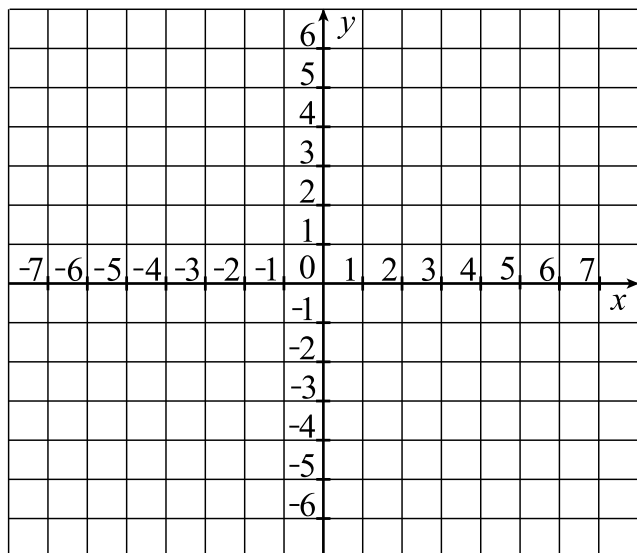
Определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком данной функции ровно три общие точки.



Ответ: _____

3) Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 1, & \text{если } x \geq -1; \\ \frac{8}{x}, & \text{если } x < -1. \end{cases}$

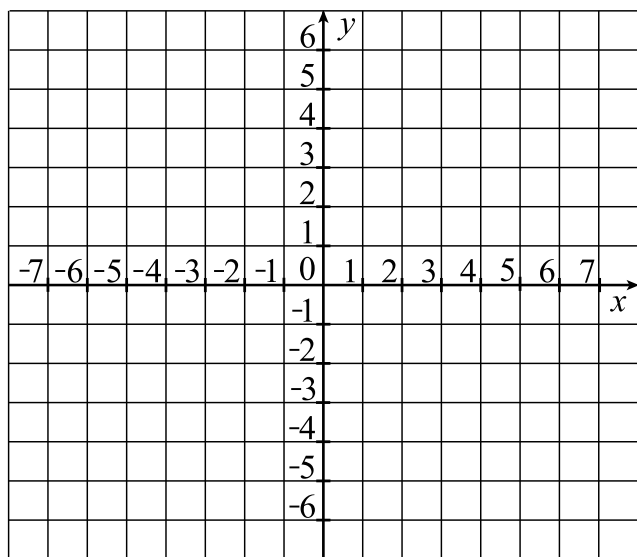
Определите, при каких значениях p прямая $y = p$ имеет с графиком данной функции ровно три общие точки.



Ответ: _____

4) Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

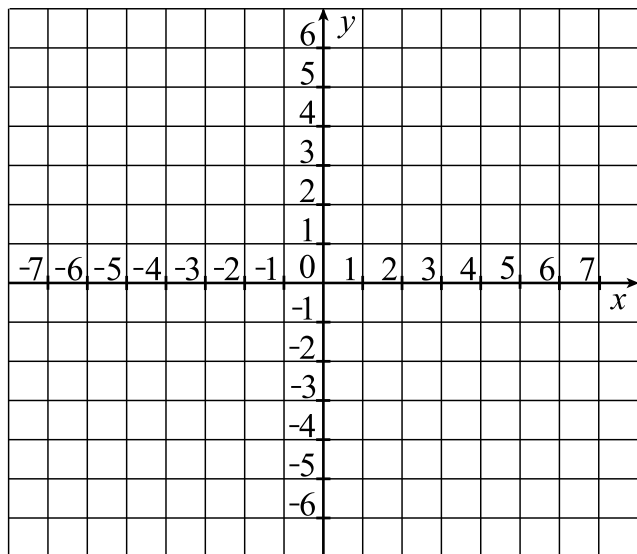
Определите, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.



Ответ: _____

5) Постройте график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$.

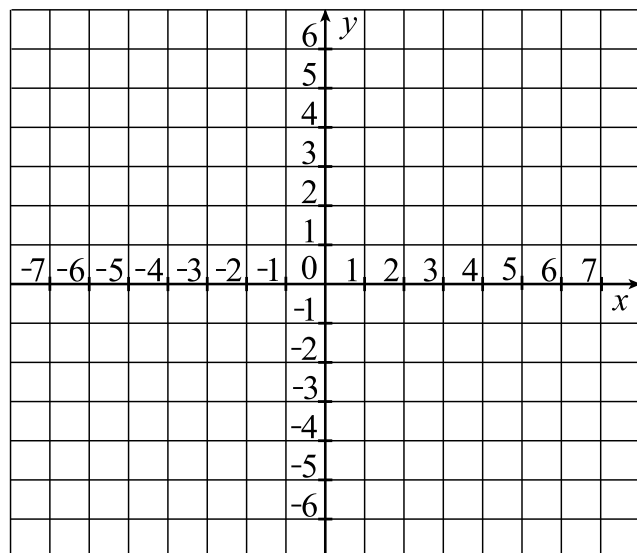
Определите, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно три общие точки.



Ответ: _____

6) Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| + 3$.

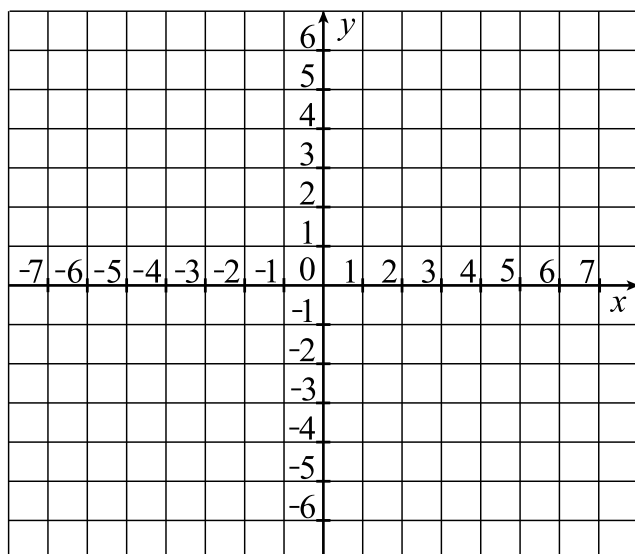
Определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком данной функции ровно три общие точки.



Ответ: _____

7) Постройте график функции $y = x^2 - |2x + 1|$.

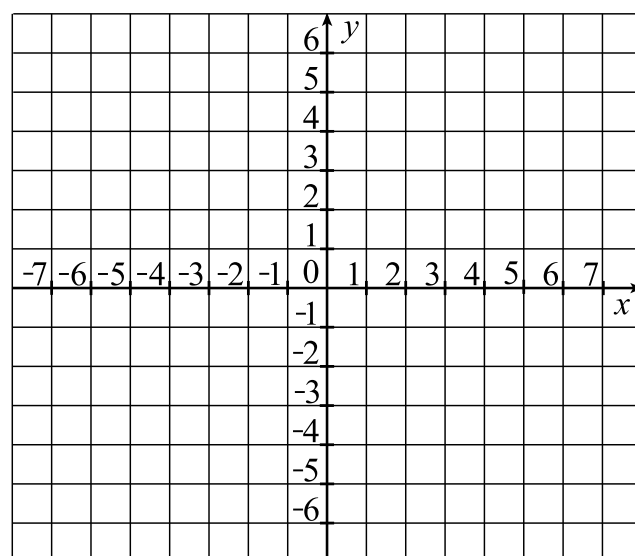
Определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки.



Ответ: _____

8) Постройте график функции $y = |x + 5| + |x - 2|$.

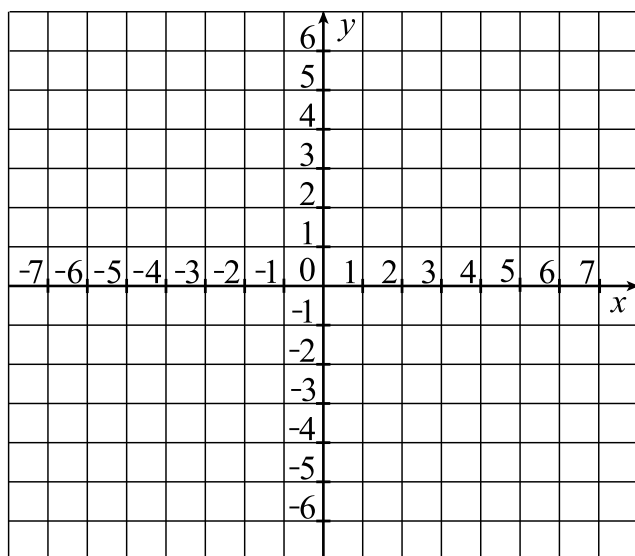
Определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки.



Ответ: _____

9) Постройте график функции $y = |x - 3| - |x - 1|$.

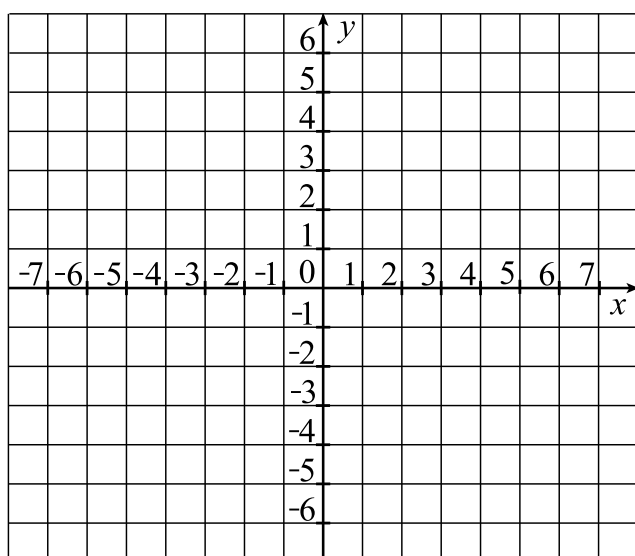
Определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки.



Ответ: _____

10) Постройте график функции $y = 2|x - 2| + |3x + 6|$.

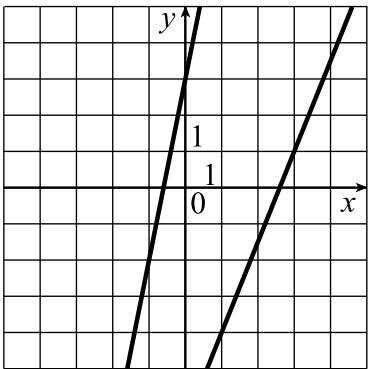
Определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки.



Ответ: _____

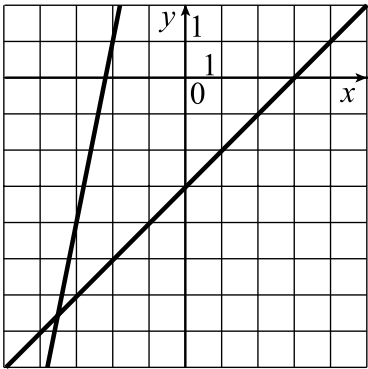
Задание 58

1) На рисунке изображены графики линейных функций, которые пересекаются в точке A .
Найдите абсциссу точки A .



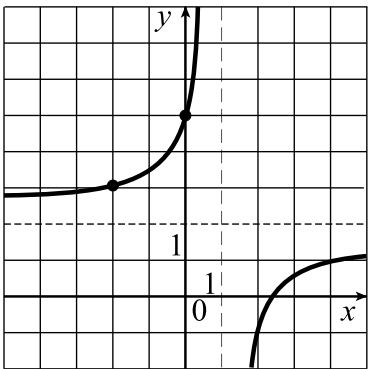
Ответ: _____

2) На рисунке изображены графики двух линейных функций.
Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



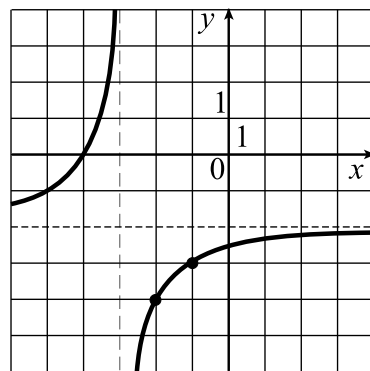
Ответ: _____

3) На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$.
Найдите a .



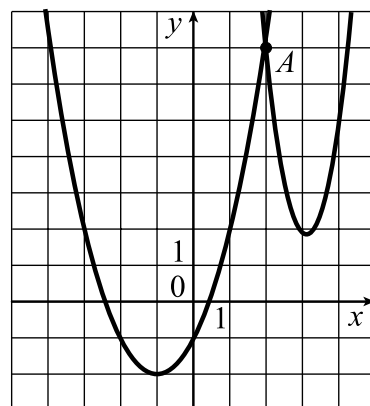
Ответ: _____

- 4) На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$.
Найдите $f(22)$.



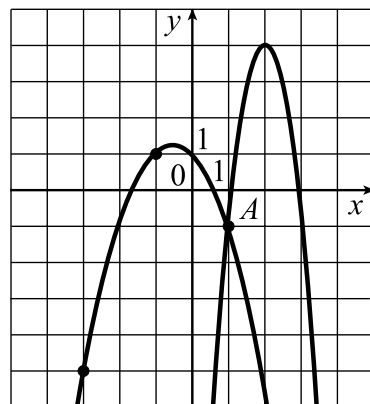
Ответ: _____

- 5) На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$,
которые пересекаются в точках A и B .
Найдите ординату точки B .



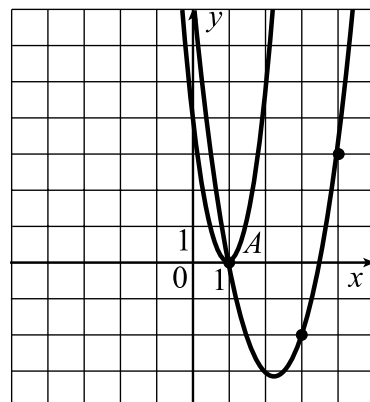
Ответ: _____

- 6) На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x^2 + 17x - 14$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$,
которые пересекаются в точках A и B .
Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____

7) На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B .
Найдите ординату точки B .



Ответ: _____

ВАРИАНТЫ ДЛЯ ИТОГОВОГО ПОВТОРЕНИЯ

Вариант 1

1. Найдите значение выражения: $\frac{\sqrt{0,67^2 - 0,33^2}}{\sqrt{8,5}}$.

2. Упростите: $\frac{2}{a+1} + \left(\frac{1}{1-2a+a^2} + \frac{1}{a^2-1} \right) \cdot (a-1)^2$.

3. Один из корней уравнения $5x^2 - 12x + c = 0$ в 2,5 раза больше другого. Найдите коэффициент c .

4. Расстояние между пристанями А и В равно 96 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 ч вслед за ним отправилась лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 45 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки 5 км/ч.

5. Решите уравнение: $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} = 2 + \frac{15}{x^2 + 2x - 3}$.

6. Найдите область определения функции $y = \sqrt{10-x} - \frac{1}{x^2-9} + \sqrt{\frac{-3}{x-1}}$.

7. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $|x+3| = p(x-4)$ имеет одно решение.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения: $\sqrt{5\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt{147} - \sqrt{6,75})$.

2. Упростите: $\frac{4ab}{a^2 - b^2} : \left(\frac{1}{b^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + 2ab + b^2} \right)$.

3. Разность корней уравнения $2x^2 - 17x - c = 0$ равна 2,5. Найдите коэффициент c .

4. Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу выехали автобус и легковой автомобиль. Они встретились через 50 минут после начала своего движения. Сколько времени потребуется автомобилю на весь путь от В до А, если известно, что автобусу потребуется на путь из А в В на 4 часа больше?

5. Решите уравнение: $7\left(y + \frac{1}{y}\right) - 2\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 9 = 0$.

6. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x^2+6x+9}} + \sqrt{\frac{18}{4-6x}}$.

7. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $p|x+2|=4-x$ имеет два решения.

Вариант 3

1. Найдите значение выражения: $\sqrt{(-49)^2} - \frac{\sqrt{3,38}}{\sqrt{0,02}}$.

2. Упростите: $\frac{3}{a-2} - \frac{3a-3}{a^2-4} \cdot \frac{a+2}{a^2-2a+1}$.

3. Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $3x^2 + 13x + c = 0$.
Найдите коэффициент c , при условии $1,5x_1 + 0,5x_2 = -4,5$.

4. Первая труба пропускает на 4 л воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 396 л она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая?

5. Решите уравнение: $(2 - y)^4 - 13y^2 = 16 - 52y$.

6. Вычислите: $\frac{4\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{7-\sqrt{40}}-\sqrt{7+\sqrt{40}}} + \sqrt{\frac{18}{4-6x}}$.

7. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $x^2 - (p-1)x + 2p - 6 = 0$ имеет два различных положительных корня, причём один из них в три раза больше другого.

Вариант 4

1. Найдите значение выражения: $(\sqrt{2} - \sqrt{8})^2 + \sqrt{1,5} \cdot \sqrt{2400}$.

2. Упростите: $\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{b-a}\right) \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}\right)$.

3. Одним из корней уравнения $4x^2 - px + 30 = 0$ является число шесть. Найдите сумму корней данного уравнения.

4. Два повара при совместной работе могут приготовить праздничный ужин за 4 часа. Если же первый повар будет работать в два раза быстрее, а второй при этом в два раза медленнее, то они смогут закончить приготовление ужина на час раньше. За сколько часов они могут приготовить ужин, работая поодиночке?

5. Решите уравнение: $(x^2 - 6x + 5) \cdot (x^2 - 8x + 7) = x^2 - 12x + 35$.

6. Вычислите: $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{57} + \sqrt{69} + \sqrt{123}}{\sqrt{41} + \sqrt{19} + \sqrt{23}}$.

7. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых уравнение $\frac{(x^2 + (4 - p)x + 4)(x + 1)}{x^3 + 1} = 0$ имеет единственный корень.

ОТВЕТЫ

Задание 1

1)	2)	3)	4)	5)
$a \neq \pm 1$	$m \neq \pm 3$	$x \neq \pm 1; 0$	$x \neq \pm 1; 0$	$y \neq \pm 3; 0$

6)	7)	8)	9)	10)
$n \neq \pm 7; 0$	$y \neq \pm 0,5; -1,5$	$y \neq \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}$	$b \neq -\frac{4}{7}; 0$	$b \neq \frac{7}{9}; 0$

11)	12)	13)	14)	15)
$m \neq -3; 1$	$m \neq 1; 3$	$t \neq \pm 1$	$s \neq \pm 1$	$a \neq \pm b \mp 4$

16)	17)	18)	19)	20)
$a \neq \pm b \pm 5$	$k \neq 2; 0$	$k \neq -0,5; 0$	$s \neq \pm 3$	$s \neq \pm 4$

Задание 2

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)
-2	5	+7	+9	-2	7	3	2	1	1	Таких значений нет	Таких значений нет

Задание 3

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
3	1; 3	1; 3	1; 2	1; 2	2	4	8; 2

Задание 8

1)	2)	3)
$a = 1, b = -1$	$a = 2, b = 3$	$a = 3, b = 6$

Задание 10

1)	2)	3)
16,2	21	1,05

Задание 12

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
14,5	$\frac{-5 \pm \sqrt{14}}{2}$	6,0625	3	± 1	Действительных корней нет	1

Задание 25

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
- 1	$-3; \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$	$\frac{-11 \pm \sqrt{97}}{26}$	0,5; 2	- 2; - 0,5; 1	$-1,3; \frac{11 \pm \sqrt{55}}{11}$	1; - 2; $\pm \sqrt{2}$

8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)
$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{\pm 3 \pm \sqrt{73}}{2}$	0	0	$\pm 1; - 0,6$

Задание 27

1)	2)	3)
11	2	9

Задание 28

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)
да	нет	нет	да	да	да	нет	да

Задание 30

1)	2)
1	1

Задание 49

1)	2)	3)
160	976562,5	1

Задание 50

1)	2)
- 1	- 1

Задание 52

1)	2)
- 1; 2	$\pm 1,5; \pm 0,5$

Задание 58

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)
- 3,8	- 3,5	- 5	- 2,04	62	- 19	33

ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задание 25 (17)

Решите уравнение:

$$20\left(\frac{y-2}{y+1}\right)^2 - 5\left(\frac{y+2}{y-1}\right)^2 + 48\left(\frac{y^2-4}{y^2-1}\right) = 0$$

Решение:

Введем переменные $m = \frac{y-2}{y+1}$; $n = \frac{y+2}{y-1}$.

Тогда $\frac{y^2-4}{y^2-1} = \frac{(y-2)(y+2)}{(y+1)(y-1)} = m \cdot n$.

Исходное уравнение примет вид: $20m^2 - 5n^2 + 48mn = 0$,

$$20m^2 + 50mn - 2mn - 5n^2 = 0,$$

$$(10m - n)(2m + 5n) = 0,$$

$$10m - n = 0 \text{ или } 2m + 5n = 0.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{10(y-2)}{y+1} - \frac{y+2}{y-1} = 0$$

или

$$\frac{2(y-2)}{y+1} + \frac{5(y+2)}{y-1} = 0$$

$$\frac{9y^2 - 33y + 18}{(y+1)(y-1)} = 0$$

$$\frac{7y^2 + 9y + 14}{(y+1)(y-1)} = 0$$

$$\frac{3y^2 - 11y + 6}{(y+1)(y-1)} = 0$$

$$\begin{cases} 3y^2 - 11y + 6 = 0; \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y^2 + 9y + 14 = 0; \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3y^2 - 11y + 6 &= 0 \\ D &= 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 49, \\ y_1 &= 3, \\ y_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7y^2 + 9y + 14 &= 0, \\ D &= 9^2 - 4 \cdot 7 \cdot 14 = -311 < 0. \\ \text{Корней нет,} \\ \text{система решений не имеет.} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{3}, 3$

Задание 26 (6)

Для каждого значения параметра a решите уравнение:

$$\frac{x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 + 5a - 3}{x^2 - 7x + 6} = 0.$$

Решение:

Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 + 5a - 3 = 0; \\ x^2 - 7x + 6 \neq 0. \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение с параметром a , переменной x .

$$x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 + 5a - 3 = 0;$$

$$x^2 - (3a + 2)x + 2a^2 - a + 6a - 3 = 0;$$

$$x^2 - (3a + 2)x + (a + 3)(2a - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3a + 2; \\ x_1 \cdot x_2 = (a + 3)(2a - 1). \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, $x_1 = a + 3$ и $x_2 = 2a - 1$.

Решим неравенство $x^2 - 7x + 6 \neq 0$, сумма коэффициентов которого равна нулю.

Значит, $x \neq 1$ и $x \neq 6$.

Исходное уравнение имеет корни, если корни первого уравнения удовлетворяют неравенству системы.

1) $a + 3 = 1$, $a = -2$;

2) $a + 3 = 6$, $a = 3$;

3) $2a - 1 = 1$, $a = 1$;

4) $2a - 1 = 6$, $a = 3,5$.

Если $a \neq -2$, $a \neq 1$, $a \neq 3$, $a \neq 3,5$, то уравнение имеет 2 корня: $x = a + 3$ и $x = 2a - 1$.

Если $a = -2$ или $a = 3$, то уравнение имеет 1 корень: $x = 2a - 1$.

Если $a = 1$ или $a = 3,5$, то уравнение имеет 1 корень: $x = a + 3$.

Ответ:

если $a \neq -2$, $a \neq 1$, $a \neq 3$, $a \neq 3,5$, то уравнение имеет 2 корня: $x = a + 3$ и $x = 2a - 1$;

если $a = -2$, то $x = -5$;

если $a = 3$, то $x = 5$;

если $a = 1$, то $x = 4$;

если $a = 3,5$, то $x = 6,5$.

Задание 47 (5)

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3|2x+5|-1,5 \leq 1; \\ \left| \frac{x-1}{3} \right| + 0,5 \geq 1, (4); \\ |2x+1| > 3. \end{cases}$$

Решение:

Решим первое неравенство системы:

$$3|2x+5|-1,5 \leq 1;$$

$$3|2x+5| \leq 2,5;$$

$$|2x+5| \leq \frac{5}{6};$$

$$-\frac{5}{6} \leq 2x+5 \leq \frac{5}{6};$$

$$-5\frac{5}{6} \leq 2x \leq -4\frac{1}{6};$$

$$-2\frac{11}{12} \leq x \leq -2\frac{1}{12}.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\left| \frac{x-1}{3} \right| + 0,5 \geq 1, (4);$$

$$\left| \frac{x-1}{3} \right| + \frac{1}{2} \geq 1\frac{4}{9};$$

$$|x-1| + 1\frac{1}{2} \geq 1\frac{4}{3};$$

$$|x-1| \geq 2\frac{5}{6};$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 2\frac{5}{6}; \\ x-1 \leq -2\frac{5}{6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3\frac{5}{6}; \\ x \leq -1\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Решим третье неравенство системы:

$$|2x+1| > 3;$$

$$2x+1 > 3;$$

$$2x+1 < -3;$$

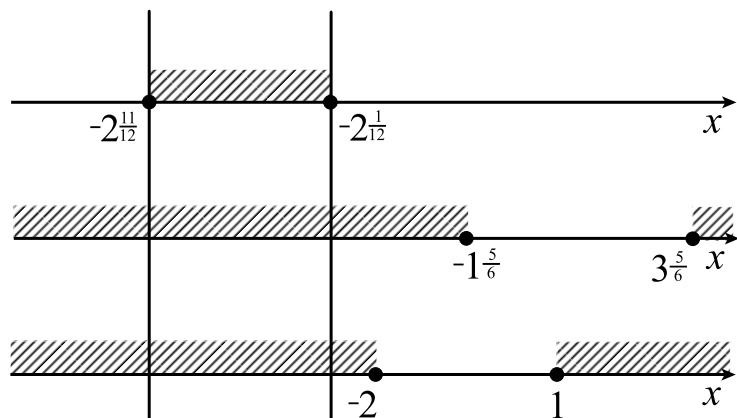
$$2x > 2;$$

$$2x < -4;$$

$$x > 1;$$

$$x < -2.$$

Изобразим решение трёх неравенств системы и найдём пересечение множеств решений.



$$x \in \left[-2\frac{11}{12}; -2\frac{1}{12} \right].$$

Ответ: $\left[-2\frac{11}{12}; -2\frac{1}{12} \right].$

Задание 57 (4)

Постройте график функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ Определите, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

Решение:
Рассмотрим функцию $y = x^2$, область определения которой все действительные числа. Графиком данной квадратичной функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина параболы находится в точке с координатами $(0;0)$.
Таблица значений координат некоторых точек, принадлежащих параболе:

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	1	4	4

Возьмём ту часть графика, абсциссы точек которой удовлетворяют условию $|x| \leq 1$, то есть $-1 \leq x \leq 1$.

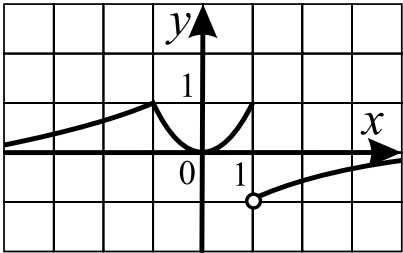
Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$, область определения которой все действительные числа, кроме 0.

Графиком данной функции является гипербола, асимптоты которой совпадают с осями координат. Таблица значений координат некоторых точек, принадлежащих гиперболе.

x	1	-1	2	-2	4	-4
y	-1	1	-0,5	0,5	-0,25	0,25

Возьмем ту часть графика, абсциссы точек которой удовлетворяют условию $|x| > 1$, то есть $x < -1$ или $x > 1$.

График функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x > 1 \end{cases}$ содержит выколотую точку с координатами $(1; -1)$.



Прямая, заданная уравнением $y = m$, параллельна оси x или совпадает с ней.

Значение параметра m	Количество общих точек прямой и графика функции
$m \leq -1$	0
$-1 < m \leq 0$	1
$0 < m < 1$	3
$m = 1$	2
$m > 1$	0

Ответ: $-1 < m \leq 0$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Дроби	4
Квадратные корни	17
Квадратные уравнения	27
Дробно-рациональные уравнения	39
Числовые неравенства и неравенства с переменными	46
Степени с целым показателем	64
Графики и функции	69
Варианты для итогового повторения	85
Вариант 1	85
Вариант 2	88
Вариант 3	91
Вариант 4	94
Ответы	97
Варианты решения и оформления заданий	99

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Куделина Д. А., Куделина Е. А.

АЛГЕБРА

8 класс

Углублённый уровень

Тетрадь-тренажёр

Учебное пособие

Генеральный директор

М. Б. Миндюк

Редактор Д. П. Локтионов

Художественный редактор Е. Ю. Воробьёва

Компьютерная вёрстка и макет Е. В. Лупенко

Корректор М. Н. Локтионова

Подписано к использованию 03.10.25

Формат 18,5×27,5 см

Гарнитура Times New Roman

Издательство «Интеллект-Центр»

125445, Москва, ул. Смольная, 24А, этаж 6, ком. 24

Тел.: (495) 660-34-53

Сайт: <https://www.intellectcentre.ru/>

Эл. почта: intellect@izentr.ru

**Электронное издание данной книги подготовлено
Агентством электронных изданий «Интермедиатор»**

Сайт: <https://www.intermediator.ru>

Телефон: (495) 587-74-81

Эл. почта: info@intermediator.ru

Издательство «Интеллект-Центр»

- Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ и Всероссийским Проверочным Работам
- Практикумы и дидактические материалы
- Сборники тестовых заданий
- Материалы для развития интеллектуальных способностей
- Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле знаний учащихся

- **Покупайте наши пособия в электронном формате в интернет-магазине «Электронный универс»**
e-Univers.ru



Издательство «Интеллект-Центр»

тел./факс: + 7 (495) 660-34-53

Ждём Ваших писем: 125445, г. Москва, ул. Смольная, д. 24А,

этаж 6, ком. 24 | e-mail: intellect@izentr.ru

www.intellectcentre.ru | vk.com/intellektcentre | t.me/izentr